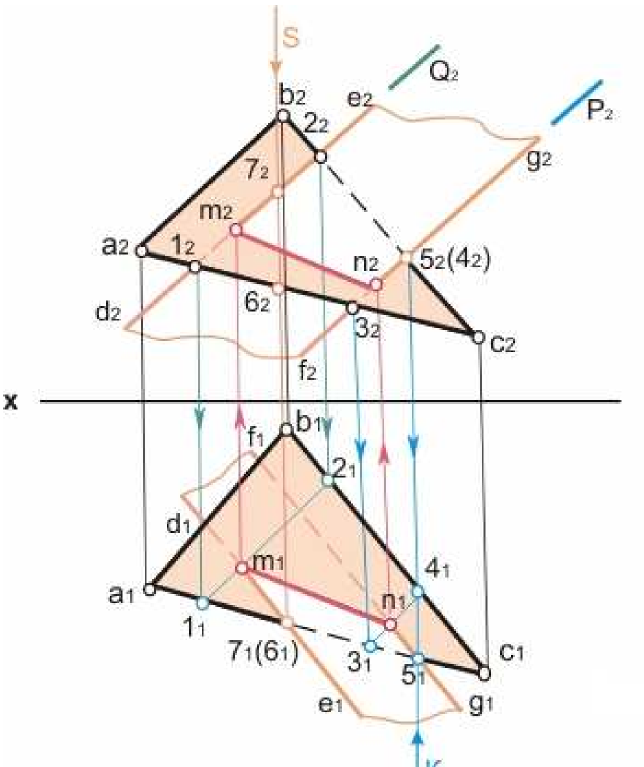
Міністерство освіти і науки України
Харківська національна академія міського господарства

Т.Л. РУДЕНКО

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу
«ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА»

(для студентів 1 курсу напряму підготовки 6.050702 – «Елекромеханіка»)



Харків – ХНАМГ – 2008

Лекції з інженерної графікиї (для студентів 1 курсу напряму підготовки 6.050702 – «Елекромеханіка») / Авт.: Т.Л. Руденко -Харків: ХНАМГ, 2008 -79 с

Автор: Т.Л. Руденко

Рецензент: проф. В.І. Лусь

Рекомендовано кафедрою інженерної та комп’ютерної графіки,
протокол № 6 від 22 січня 2008 р.

ВСТУП

На сучасному рівні технічного прогресу жодне встаткування або машина, жодна деталь або виріб побутового призначення не можуть бути виготовлені без попередньої розробки проекту. Однієї зі складової проекту є графічна інформація, що визначає форму, розміри, матеріал об'єкта, технологію його виготовлення, порядок зборки деталей у вузлі, а вузлів у конструкцію машини або встаткування.

Мова графіки - найбільш наочний і найбільш компактна мова техніки.

Навчальна дисципліна «Нарисна геометрія, інженерна й комп'ютерна графіка» - комплексна, вона складається із трьох розділів «Нарисна геометрія», «Інженерна графіка», «Обчислювальна геометрія й комп'ютерна графіка», які є органічним цілим, де одна частина розвиває й доповнює інші.

Нарисна геометрія є граматикою інженерної графіки. Вона вивчає теоретичні основи геометричного моделювання тривимірних об'єктів методом проекційних зображень.

Інженерна графіка базується на методі проекційних зображень і вивчає встановлені державними стандартами умовності, спрощення й особливості застосування цього методу для видачі графічної проектно-конструкторської документації.

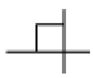
Комп'ютерна графіка - сучасний інструмент автоматизації, підвищення якості й швидкості проектування.

У курсі лекцій по нарисній геометрії розгляд методу проекційних зображень починається з побудови проекцій точки, тому що при побудові зображення будь-якої проекційної форми розглядається ряд точок, що належать цій формі.

Для повторення й закріплення досліджуваного матеріалу до теми кожної лекції є питання, на які необхідно відповісти.

Указана навчальна література для бажаючих ознайомитися з різними варіантами викладу дисципліни й з її деякими додатковими питаннями.

ПОЗНАЧЕННЯ І СИМВОЛІКА

A, B, 3, D, E ... або **1, 2, 3, 4, 5** ... - точки в просторі;
a, b, c, d, e, ... - прямі й криві лінії в просторі;
Δ, Ф, Г, Р, Σ … – площини й поверхні в просторі;
Oxyz - система координат у просторі;
Ox, Oy, Oz - осі координат;
= - рівність, збіг;
$\cap$ - перетинання (**b** $\cap$ **Σ = A** - пряма **b** перетинає площина **Σ** у точки **A**, подібний запис буде для кривої і поверхні, однак по тексту зрозуміло, про які фігури йде мова);
$\parallel$ - паралельність (**b** $\parallel$ **d** - пряма **b** паралельна прямій **d**);
$\dot{-}$ – схрещуваність (**m** $\dot{-}$ **n** - прямі **m** і **n** схрещуються);
$\perp$ - перпендикулярність (**e** $\perp$ **Σ** - пряма е перпендикулярна до площини **Σ**);
$\in$ - приналежність елемента множини даній множині (**A** $\in$ **b** - точка **A** належить лінії **b**);
$\subset$ - приналежність підмножини множині (**n** $\subset$ **Σ** - лінія належить поверхні);
$\neq$, $\notin$, $\not\subset$, ... - знаки, що позначають заперечення вказаних вище відношень;
$\rightarrow$ – відображення ($A \rightarrow A_1$ – точка **A** відображається в точку A_1);
$\Rightarrow$ - знак логічного наслідку;
Π_1– горизонтальна площина проекцій (**Oxy**);
Π_2– фронтальна площина проекцій (**Oxz**);
Π_3– профільна площина проекцій (**Oyz**);
h – горизонталь (пряма, паралельна площині Π_1);
f – фронталь (пряма, паралельна площині Π_2);
p - профільна пряма (пряма, паралельна профільній площині **П3**);
$A_1, B_1, 3_1, D_1, E_1$ … або $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$ … – проекції точок на Π_1;
$A_2, B_2, 3_2, D_2, E_2$ … або $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$ … – проекції точок на Π_2;
$A_3, B_3, 3_3, D_3, E_3$ … або $1_3, 2_3, 3_3, 4_3, 5_3$ … – проекції точок на Π_3;
a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, … – проекції прямих або кривих ліній на Π_1;
a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, … – проекції прямих або кривих ліній на Π_2;
a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, … – проекції прямих або кривих ліній на Π_3;
$\Delta_1, \Phi_1, \Gamma_1, P_1, \Sigma_{1\ldots}$ …–проекції площин і поверхонь на Π_1;
$\Delta_2, \Phi_2, \Gamma_2, P_2, \Sigma_{2\ldots}$ …–проекції площин і поверхонь на Π_2;
$\Delta_3, \Phi_3, \Gamma_3, P_3, \Sigma_{3\ldots}$ …–проекції площин і поверхонь на Π_3;
Π_4, Π_5, Π_6, … – нові (додаткові) площини проекцій;
x_{14}, x_{25}, … – нові осі ($x_{14} = \Pi_1 \cap \Pi_4$, $x_{25} = \Pi_2 \cap \Pi_5$) або x_1, x_2, x_3, …, якщо приналежність осей площинам проекцій не викликає сумнівів;
,  – можливі варіанти графічного позначення прямого кута на кресленні.

<u>ЛЕКЦІЯ 1</u>

1.1. Предмет нарисної геометрії;

1.2. Метод проекцій;

1.2.1. Види проекціювання та їх властивості;

1.3. Метод Монжа;

1.3.1. $2^х$картинне креслення;

1.3.2. $3^х$картинне креслення.

Контрольні запитання і вправи

1.1. Однією з дисциплін, які складають основу інженерної освіти, є нарисна геометрія. Вона вивчає побудову зображень просторових об'єктів (пряма задача), а також відтворення об'єктів у просторі, якщо об'єкти задані своїми зображеннями (зворотна задача). Вивчення нарисної геометрії сприяє розвитку просторового мислення, удосконалює здібності створювати уявлення про форму об'єкта і готує майбутнього інженера до технічної творчості – проектування.

Зображення в нарисній геометрії виконуються за правилами, які дозволяють мати повне уявлення про об'єкт (оригінал). Прагнення до зображень було обумовлено практичною діяльністю людини при створенні різних споруд, машин, приладдя і т. п. В процесі розвитку суспільства прийоми зображень узагальнювались і підкріплювались законами геометрії. З часом ці узагальнення перетворилися в окрему учбову дисципліну, яка стала обов'язковою при підготовці інженерів будь-якого профілів.

Треба відзначити, що ніякий словесний опис не може дати такого детального уявлення про зміст споруди або машини, як його креслення. Цілком природно, що в процесі розвитку людського суспільства "прагнення до зображень, зарисовок має більш давнє походження, ніж виникнення писемності" (М. Ф. Четверухін). Однак сама графічна інформація про об'єкт, що створюється, вже не задовольняє сучасний спосіб виробництва. Тому в ряді випадків креслення доповнюють аналітичними описами. Але основою для опису проектованого об'єкта залишається його геометрична модель, яка побудована за допомогою методу нарисної геометрії.

Геометрична модель дає можливість вирішувати різні позиційні та метричні задачі. До позиційних прийнято відносити задачі на взаємну належність, перетин і мимобіжність геометричних фігур. До метричних – задачі на визначення відстаней, кутів та натуральних величин геометричних фігур.

1.2. Методом нарисної геометрії є метод проекцій, який передбачає наявність площини проекцій, проекціюючого променя (променів) та просторового об'єкта, що проекцюється. На рис 1.1 показано площину проекцій $П_1$, об'єкт – точку А, що проекцюється у вигляді точки A_1, проекцюючий промінь AA_1, а також об'єкт – пряму a , що проекцюється у вигляді прямої лінії a_1.

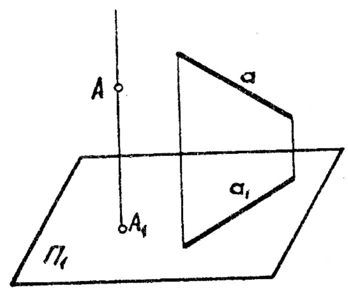


Рис. 1.1.

1.2.1. В залежності від відстані джерела проекцюючих променів маємо два види проекціювання – **центральне** і **паралельне**. **Центральним** проекціюванням називається таке, при якому джерело проекцюючих променів міститься на скінченній відстані від об'єкта, що проекцюється, і площини проекцій. **Паралельним** проекціюванням вважається таке, при якому прекцюючі промені паралельні між собою, тобто коли джерело променів знаходиться на нескінченно великій відстані від об'єкта і площини проекцій. Одержані проекції в залежності від застосованого виду проекціювання називаються **центральна** проекція і **паралельна** проекція.

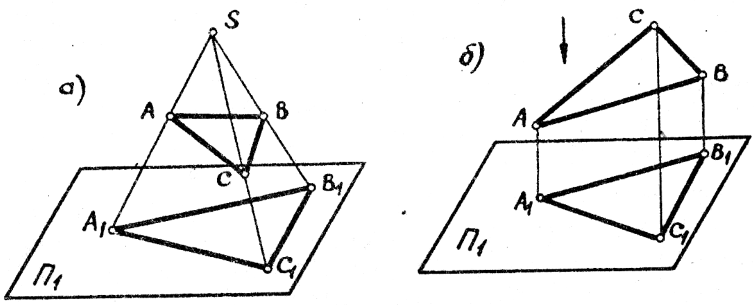


Рис. 1.2.

На рис. 1.2 показані центральна та паралельна проекції трикутника ABC на площину проекцій $П_1$. При центральному проекціюванні (рис. 1.2, а) напрямок променів визначається положенням точки S, яка є центром проекцій або полюсом. При паралельному проекціюванні (рис. 1.2, б) напрямок проекцюючих променів визначається вектором. Величина проекції $A_1B_1C_1$, як свідчить креслення, при центральному проекціюванні залежить від відстані між площиною проекцій та об’єктом, що проекцюється. При паралельному проекціюванні величина проекції залишається незмінною.

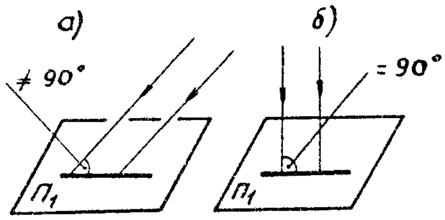


Рис. 1.3.

Паралельні проекції в залежності від кута, який утворюють проекцюючі промені з площиною проекцій, поділяються на косокутні, якщо згаданий кут не дорівнює 90° (рис.1.3, а), та прямокутні, коли цей кут прямий (рис 1.3, б). Прямокутне проекціювання ще називають ортогональним.

Основні властивості проекціювання:

1. Проекцією точки є точка (рис. 1.1);
2. Проекцією прямої у загальному випадку є пряма (рис. 1.2);
3. Властивість належності: якщо точка належить до прямої, то проекція точки належить проекції прямої (рис. 1.2);
4. Якщо прямі у просторі паралельні, то їхні проекції також паралельні;

5. Відношення паралельних відрізків при проекціюванні зберігаються;
6. Якщо точка поділяє відрізок у заданому відношенні, то проекція точки поділяє проекцію відрізку у тому же відношенні;
7. Проекція відрізку у загальному випадку менше самого відрізку;
8. Прямий кут проекцюється в прямий, якщо одна його сторона паралельна площині проекцій, а друга – не перпендикулярна до неї.

Властивості 1-3 відносяться до центрального проекціювання.

Властивості 1-6 відносяться до паралельного проекціювання.

Властивості 1-8 відносяться до ортогонального проекціювання.

1.3. При наявності площини проекцій, точки в просторі та проекцюючого променя (рис. 1.4, а) фіксується лише одна точка перетину променя, що проходить через задану точку, з площиною проекцій. Ця точка перетину є проекція заданої точки і повністю визначається проекцюючим променем, орієнтованим заданою точкою.

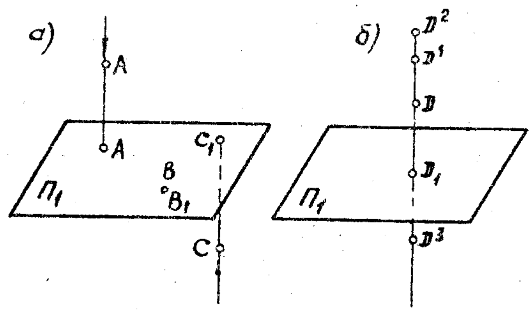


Рис. 1.4.

При наявності ж тільки однієї проекції точки (при тих же засобах проекціювання) неможливо зафіксувати цю точку в просторі, бо заданій проекції, наприклад, D_1, відповідатиме будь-яка точка з ряду D, D^1, D^2… і т. ін. (рис. 1.4, б). Інакше кажучи, одна проекція (проекція на одну площину) будь-якої точки не визначає єдину точку в просторі. Таку повністю визначену в просторі точку можуть фіксувати лише дві задані проекції, тобто не один комплект засобів проекціювання, а два (дві площини з проекціями на них).

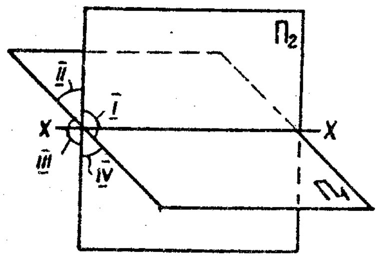


Рис. 1.5.

Дві площини, одна з яких $П_1$ горизонтальна, а друга $П_2$ фронтальна (рис. 1.5), назвемо відповідно горизонтальною та фронтальною площинами проекцій. Вони перетинаються по прямій X, що є віссю проекцій. Увесь простір тепер поділено площинами проекцій $П_1$ і $П_2$ на чотири частини, які називаються чвертями. Горизонтальна і фронтальна площини проекцій діляться взаємно на дві частини, котрі звуться напівплощинами або полами. В зв’язку з тим, що площини проекцій, як всякі площини, меж не мають, на них проекціями можна зображати увесь простір бо яку завгодно його частину. При цьому дві проекції завжди визначають положення предмета відносно площин проекцій.

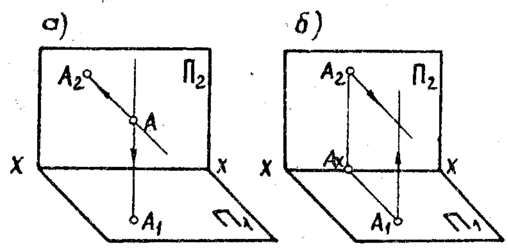


Рис. 1.6.

На просторовому зображенні (рис. 1.6, а) дано точку А та її проекції A_1 і A_2. Там же (рис. 1.6, б) подані лише проекції A_1 та A_2 точки.

Порівнюючи два зображення, відзначимо, що в обох випадках положення точки А цілком визначене наявністю двох її проекцій, бо останні собою фіксують точки від площин проекцій. Відрізок A_2A_x дорівнює відрізку AA_1, а відрізок A_1A_x – відрізку AA_2. Таким чином, у випадку, коли на зображенні мають місце лише проекції, відрізок A_2A_x є відстань точки А від площини $П_1$, а відрізок A_1A_x – відстань від площини $П_2$.

Сутність методу Монжа полягає в тому, що об'єкт проектується ортогонально на дві чи більше взаємно перпендикулярних площин проекцій.

Просторове зображення площин, що несуть на собі проекції елементів простору, можна перетворити в площинне креслення, сумістивши площини в одну. Суміщення здійснюється поворотом горизонтальної площини проекцій навколо осі X при нерухомій фронтальній площині проекцій (рис. 1.7). таке суміщене положення площин проекцій називається комплексним кресленням, а частіше просто кресленням або епюром.

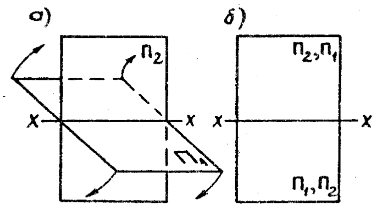


Рис. 1.7.

Після суміщення площин проекцій в одну носієм двох проекцій точок простору стає площина креслення. Положення точок відносно площин проекцій визначається розташуванням проекцій відносно осі X.

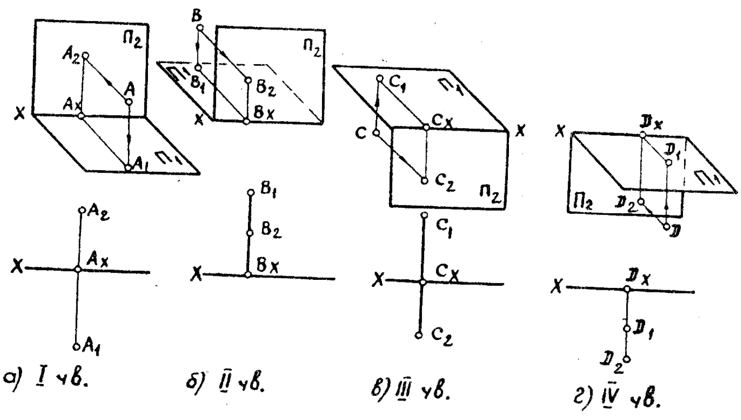


Рис. 1.8.

1.3.1. На рис. 1.8. показано просторові зображення та креслення точок A, B, C, D, розташованих відповідно в I, II, III, IV чвертях простору. Внаслідок того, що проекцюючі промені перпендикулярні до площин проекцій, утворена ними площина перпендикулярна до осі проекцій X. Ця площина перетинається з площинами проекцій по прямих A_2A_x та A_1A_x (рис. 1.8., а), кожна з яких перпендикулярна до осі X. Після суміщення площин проекцій в площину креслення A_2A_x і A_1A_x зіллються в одну пряму. Отже на кресленні фронтальна і горизонтальна проекції розташуються на спільному перпендикулярі до осі X. Цей перпендикуляр, що з'єднує горизонтальну та фронтальну проекції точки, називається **лінією проекційного зв'язку**. За розташуванням горизонтальної та фронтальної проекцій точки відносно осі проекцій роблять висновок про те, в якій чверті простору знаходиться точка.

Якщо на кресленні фронтальна проекція точки розташована вище осі X, а горизонтальна нижче, сама точка знаходиться в I чверті простору (рис. 1.8. а). При тому ж положенні (вище осі X) фронтальної проекції сама точка буде розташована в II чверті, якщо її горизонтальна проекція лежить теж вище осі X (рис. 1.8. б). Розташування проекцій точки на кресленні для III і IV чвертей показано на рис. 1.8. в, г. Якщо точка лежить на площині проекцій, то одна із проекцій цієї точки розташується на осі проекцій. Точка E (E_1, E_2) лежить на передній півплощині горизонтальної площини проекцій (рис. 1.9. а). Точка F (F_1, F_2) розміщена на верхній півплощині фронтальної площини проекцій (рис. 1.9. б), а точка K (K_1, K_2) – на осі X, тобто в двох площинах проекцій (рис. 1.9. в).

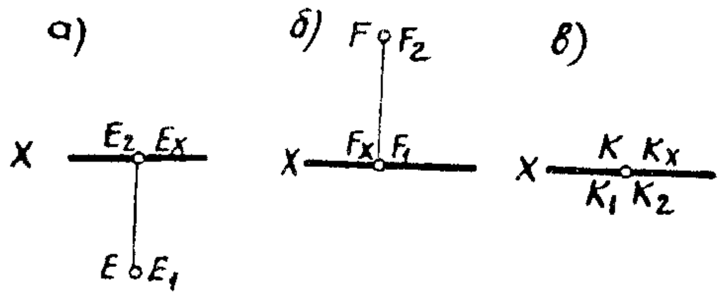


Рис. 1.9.

1.3.2. Проекції на дві площини не завжди забезпечують повне уявлення про форму предмета та про його положення у просторі. В багатьох випадках виникає необхідність в проекціюванні на третю площину, перпендикулярну площинам $П_1$ та $П_2$, яка називається **профільною** площиною проекцій, або боковою, і позначається $П_3$.

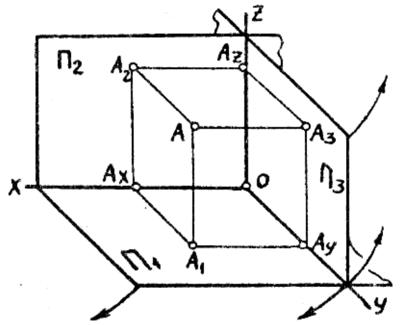


Рис. 1.10.

Три площини проекцій $П_1$, $П_2$. $П_3$ ділять весь простір на вісім частин, кожну з яких назвемо октантом. Створюється система трьох взаємоперпендикулярних напрямків, що характеризуються осями X, У, Z (рис. 1.10). Три площини проекцій перетворюються в креслення відомим уже обертанням горизонтальної площини навколо осі X та обертанням профільної площини навколо осі Z до суміщення з фронтальною площиною проекцій (рис. 1.11).

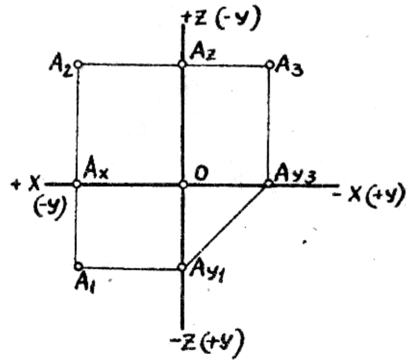


Рис. 1.11.

При такому суміщенні передня півплощина площини $П_3$ переміщується праворуч від осі Z, а задня півплощина – ліворуч від цієї осі. Зважаючи на те, що площини $П_1$ і $П_3$ при суміщенні з площиною $П_2$ обертаються навколо різних осей, лінія їх перетину – вісь У – немов би роздвоюється по "товщині" і однією частиною своєї "товщини" суміщується з віссю Z, а другою – з віссю X.

Розглянемо побудову проекцій точки, що знаходиться в першому октанті. На просторовому зображенні (див. рис. 1.10) фронтальна A_2 та профільна A_3 проекції точки A розташовані на спільному перпендикулярі до осі Z, бо промені, що проекціюють точку A на $П_2$ та $П_3$, створюють собою площину, перпендикулярну до осі Z. Крім цього, відрізок A_3A_z дорівнює відрізку A_1A_x як проекції одного відрізка на дві паралельні йому площини $П_1$ та $П_3$, що становлять собою величину відстані точки А до площини $П_2$.

Все сказане про побудову трьохкартинного комплексного креслення можна узагальнити трьома правилами:

1. Горизонтальна та фронтальна проекції кожної точки простору розташовані на спільному перпендикулярі до осі Z.

2. Фронтальна і профільна проекції точки розташовані завжди на спільному перпендикулярі до осі Z.

3. Профільна проекція точки так віддалена від осі Z, як горизонтальна проекція тієї ж точки – від осі X.

За заданим кресленням точки можна визначити координати цієї точки відносно осей X, У, Z так само, як за заданими координатами легко виконується креслення. На рис. подано креслення точки, заданої цифровими значеннями координат X, У, Z. Перша цифра є величина абсциси X, друга – ординати У і третя – аплікати Z. Знаючи, що абсциса визначає відстань від профільної площини проекцій, ордината – відстань від фронтальної площини проекцій, а апліката – відстань від горизонтальної, можна легко виконувати креслення, наносячи на нього проекції по заданих координатах. Інакше кажучи, з кожного креслення можна взяти координати будь-якої просторової точки. При цьому відстань фронтальної проекції точки до осі X – це відстань точки до площини $П_1$ (або аплікати цієї точки), відстань горизонтальної проекції точки до осі X – це відстань точки до площини $П_2$ (або ордината точки), а відстань фронтальної проекції точки до осі Z – це відстань точки до площини $П_3$ (або абсциса цієї точки).

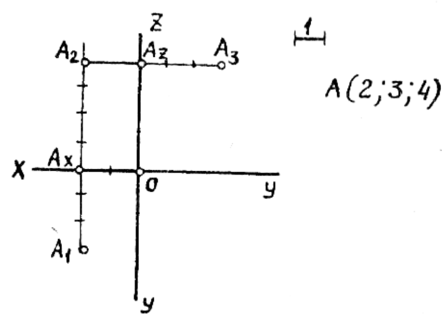


Рис. 1.12

Контрольні запитання та вправи

1. Визначити, чим відрізняється центральне проекціювання від паралельного
2. Зробити довільне просторове зображення променів косокутного та прямокутного проекціювань
3. Побудувати просторове зображення і комплексне креслення точки та площин проекцій
4. Побудувати креслення точки з урахуванням трьох правил ортогонального проекціювання.

ЛЕКЦІЯ 2

2.1. Проекціювання прямої лінії.

2.1.1. Взаємна належність точки і прямої

2.2. Взаємне положення двох прямих

2.3. Зображення площини

Контрольні запитання та вправи

2.1. Пряма лінія визначається двома точками. Тому зображення прямої на кресленні вимагає зображення двох точок, що визначають цю пряму. Якщо з'єднати однойменні проекції двох точок (рис. 2.1., а), будемо мати фронтальну A_2B_2 і горизонтальну A_1B_1 проекції прямої. Пряму (рис. 2.1., б), і всяку лінію взагалі, умовимось позначати малими літерами латинського алфавіту – a, b, c, d…

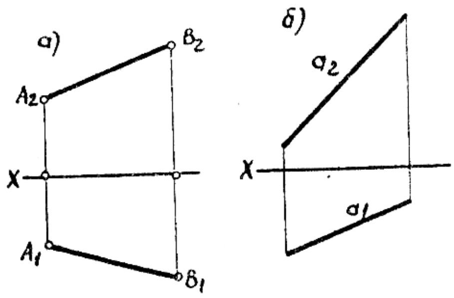


Рис. 2.1.

Пряма по-різному може бути розташована відносно площин проекцій: загального розташування, паралельною або перпендикулярною до однієї з площин проекцій. Прямою загального розташування називається така, кути якої з усіма площинами проекцій більші 0° і менші 90° (рис. 2.1.). Прямі, що перпендикулярні будь-якій площині проекцій, є проекціюючими, бо вони збігаються з проекціюючим променем. В залежності від площини проекцій, до якої пряма перпендикулярна, пряма може бути відповідно горизонтально (рис. 2.2., а), фронтально (рис. 2.2.,б) і профільно проекціюючою (рис. 2.2., в).

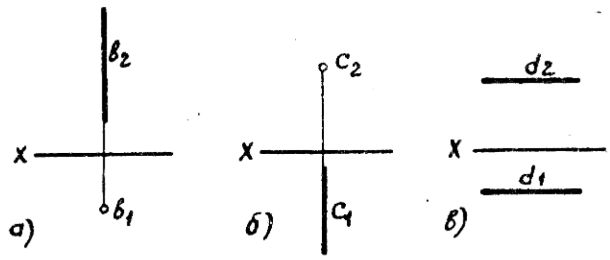


Рис. 2.2.

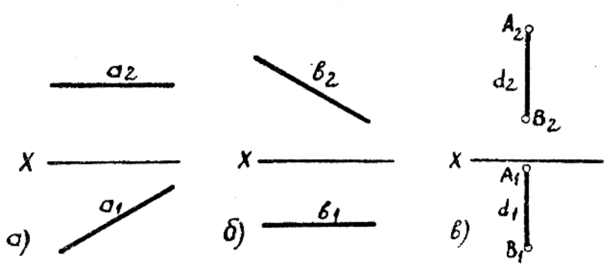


Рис. 2.3.

Прямі, паралельні будь-якій площині проекцій, називаються відповідно горизонтальними (рис. 2.3., а), фронтальними (рис. 2.3., б), профільними (рис. 2.3., в). Пряма, що розташована в одній з площин проекцій або що збігається з віссю проекцій, являє собою окремий випадок відповідно паралельності та перпендикулярності прямої.

2.1.1. Точка належить (інцидентна) прямій, якщо вона збігається з однією з точок даної прямої. Якщо спроекціювати пряму з належною їй точкою на дві площини проекцій, то горизонтальна проекція точки розташується на горизонтальній проекції прямої, а фронтальна –на фронтальній, тобто точка належить прямій тільки тоді, коли проекції цієї точки збігаються з однойменними проекціями прямої.

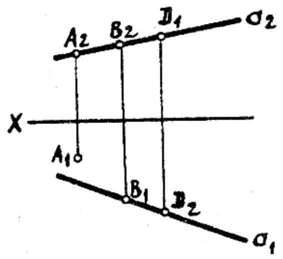


Рис. 2.4.

На кресленні (рис. 2.4.) дано пряму а та точки А, В, D. Лише точка В (B_1, B_2) серед трьох задовольняє поставленій умові і отже належить прямій *а* (a_1, a_2). Точка А не належить даній прямій, бо її горизонтальна проекція A_1 не лежить на горизонтальній проекції A_1 прямої. Точка D також не задовольняє умові належності, бо її проекції збігаються з різнойменними проекціями прямої: $D \equiv a_2$, $D_2 \equiv a_1$.

2.2. У паралельних між собою прямих однойменні проекції паралельні.

Дві прямі перетинаються, якщо є для них єдина спільна точка. Проекції цієї точки на кресленні розташовані на спільному перпендикулярі до осі проекцій. проекції перетин них прямих (за умови взаємної належності точки та прямої) повинні проходити через однойменні проекції точки перетину (рис. 2.5.). Закономірним наслідком сказаного є правило: прямі в просторі перетинаються, якщо на кресленні їх однойменні проекції перетинаються так, що точки перетину цих проекцій розташовані на спільному перпендикулярі до осі проекцій (рис. 2.5., б).

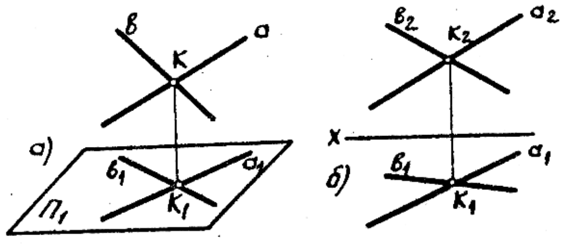


Рис. 2.5.

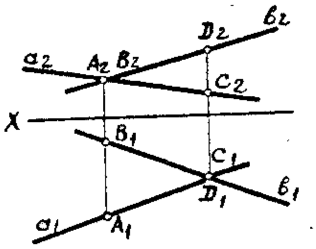


Рис. 2.6.

Мимобіжні прямі характеризуються тим, що між собою не паралельні і не мають спільної точки. В зв'язку з цим однойменні проекції таких прямих можуть перетинатись на кресленні, але точки перетину цих проекцій не розташовані на спільному перпендикулярі до осі проекцій (рис. 2.6.). Тут точки перетину однойменних проекцій прямих не є проекціями двох точок, що належать до різних прямих. В точці перетину фронтальних проекцій a_2 та b_2 містяться фронтальні проекції A_2 та B_2 точок A і B. проекції цих двох точок збігаються на кресленні тому, що A і B розташовані на спільному фронтально проекціюючому промені, який проекціює на площину $П_2$ точку A прямої a та точку B прямої b. Самі ж точки A і B в просторі не збігаються, на що показує горизонтальна проекція. Все сказане має відношення й до точки перетину горизонтальних проекцій a_1 та b_1 прямих, де вона є збігом горизонтальних проекцій C_1 та D_1 точок C і D. В просторі C і D не збігаються. Про це свідчить фронтальна проекція.

Точки, що розташовані в просторі на спільному проекціюючому промені, називаються **конкуруючими точками**. Їх однойменні проекції на кресленні збігаються. За допомогою таких точок, що мають належність до різних геометричних об'єктів, зручно визначати на кресленнях видність цих об'єктів.

На кресленні (рис. 2.6.) A та B – точки, конкуруючі відносно фронтальної площини проекцій. Вони належать різним прямим. Визначивши видність згаданих точок в напрямку фронтально проекціюючого променя, що їх об'єднує, визначимо видність прямих, яким належать точки. Як показує горизонтальна проекція креслень, точка A ближче до спостерігача, ніж точка B (A – далі від площини $П_2$) і тому при погляді вздовж променя AB (спереду) точка A (пряма *a*) видима, а точка B (пряма *b*) невидима. При погляді вздовж CD (зверху) точка D (пряма *b*) видима, а точка C (пряма *a*) невидима.

2.3. Спроекціювати площину як безмежний плоский об'єкт на площину проекцій неможливо, бо проекція площини на площину є невизначеним геометричним образом. У зв'язку з такою невизначеністю площину на кресленні задають геометричними елементами, що можуть її визначити. Площину можуть визначати точка та пряма, неінцидентні між собою, дві прямі, що перетинаються або паралельні між собою. Площина може бути задана будь-якою плоскою фігурою. На просторовому зображенні та на кресленні (рис. 2.7.) подані три точка A, B, C. якщо точки з'єднати прямими, площина буде мати вигляд трикутника ABC, проекції якого $A_1B_1C_1$ та

$A_2B_2C_2$. Цю ж площину можна задати на кресленні двома прямими а (a_1, a_2) та b (b_1, b_2) (рис. 2.8.), що перетинаються в точці А (A_1, A_2).

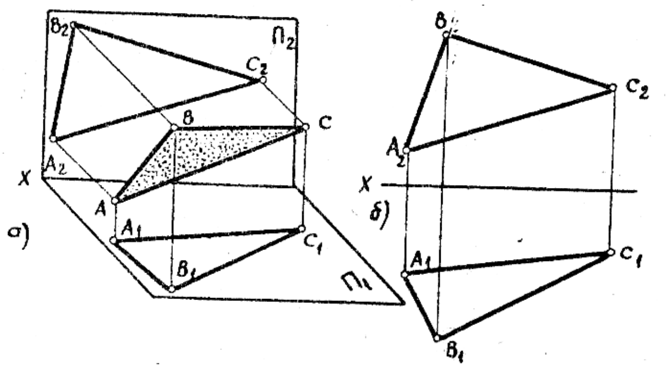


Рис. 2.7.

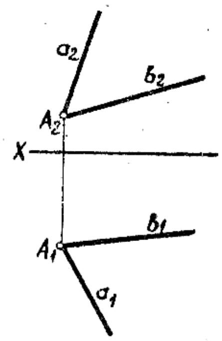


Рис. 2.8.

Всяку площину, розташовану в просторі не паралельно і не перпендикулярно якій-небудь площині проекцій, назвемо **площиною загального положення**. Всі площини, розташовані інакше, будуть перпендикулярними до однієї або двох площин проекцій; вони називаються **проекціюючими площинами** (рис. 2.9.). Будь-яка проекціююча площина сама себе проекціює в пряму лінію на площину проекцій, до якої перпендикулярна. Вона при цьому одночасно є об'єктом проекціювання і його засобом.

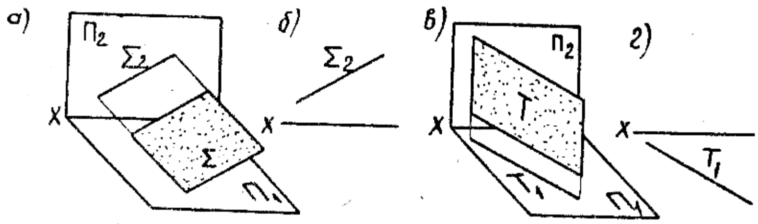


Рис. 2.9.

Площина, що перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається фронтально проекціюючою, а перпендикулярна горизонтальній площині проекцій – горизонтально проекціюючою, фронтально проекціююча площина (рис. 2.9.) проекціюється на площину Π_2 в пряму Σ_2, а на площину Π_1 – в усе поле площини проекцій. Прямі, в які проекціюється площина Σ на площину проекцій Π_2 та площина T на площину проекцій Π_1, є проекціями відповідно Σ_2 та T_1.

Із групи проекціюючих площин можна виділити такі, що є проекціюючими одночасно на дві площини проекцій. Такі площини будуть перпендикулярними до двох площин проекцій, тобто паралельними до третьої. Площини, що знаходяться на рівній відстані від всіх точок площини проекцій, називаються площинами рівня (рис.).в залежності від тієї площини, відносно якої показують рівень дані площини, вони є горизонтальною, фронтальною, профільною. Площина Ω (рис. 2.10., а, б) – горизонтальна. Площина Р (рис. 2.10.,в г) – фронтальна.

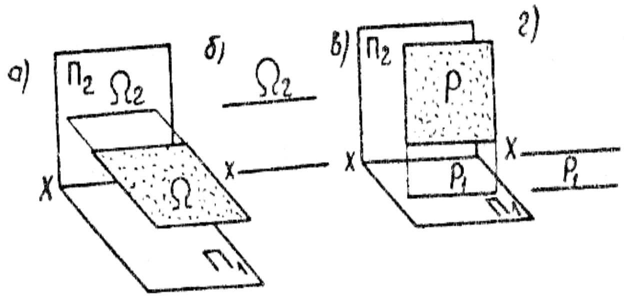


Рис. 2.10.

Контрольні запитання та вправи

1. Визначити всі можливі варіанти розташування прямої лінії відносно площин проекцій.
2. Показати на кресленні умови, за яких точка належить прямій.
3. Побудувати на комплексному кресленні фронтально і горизонтально конкуруючі точки.

ЛЕКЦІЯ 3

3.1. Взаємна належність прямої та площини

3.2. Взаємна належність точки і площини

3.3. Паралельність прямої та площини

3.4. Паралельність площин

3.1. Пряма належить (інцидентна) площині, коли дві точки цієї прямої належать даній площині або коли пряма паралельна площині і має з нею спільну точку.

Дійсно і зворотне: площина проходить через пряму, коли дві точки цієї площини належать даній прямій. Виходячи з цих основних положень, питання про проведення в заданій площині прямої або площини через задану пряму зводиться до встановлення взаємоналежності двох точок прямої з площиною.

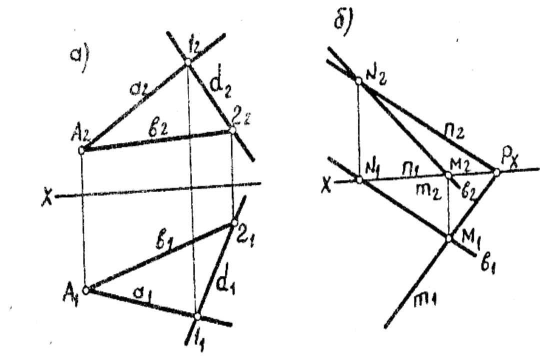


Рис. 3.1.

На кресленні (рис. 3.1., а) пряма d належить площині Σ (a∩b), бо точки 1 та 2 цієї прямої належать даній площині. Це стверджуємо на основі того, що пряма перетинається з кожною із прямих, які визначають нашу площину: в точці 1 (1_1, 1_2) – з прямою а, в точці 2 (2_1, 2_2) – з прямою b. На кресленні (рис. 3.1., б) площина Т (m∩n) задана слідами. Пряма d (b_1, b_2) належить даній площині, бо вона перетинається в двох точках з прямими площини: в точці N (N_1, N_2) – з прямою n (n_1, n_2) і в точці М (M_1, M_2) – з прямою m (m_1, m_2). Таким чином, визначальною ознакою взаємоналежності прямої та площини є ознака перетину прямих. Як бачимо з креслення (рис. 3.1., б), сліди площини і прямої, що належить цій площині, знаходяться у взаємній належності, тобто фронтальний слід N (N_1, N_2) прямої лежить на фронтальному сліді n (n_1, n_2) площини і горизонтальний слід М (M_1, M_2) прямої лежить на горизонтальному сліді m (m_1, m_2) площини. Більш узагальнено сказане вище має таку форму: пряма та площина взаємоналежать, якщо взаємоналежать однойменні їх сліди.

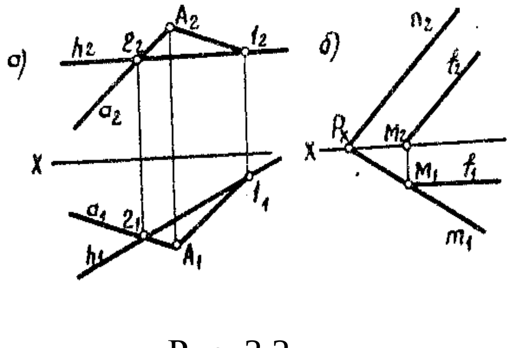


Рис. 3.2.

Серед безлічі прямих, що можна провести в будь-якій заданій площині, розглянемо прямі, розташовані паралельно площинам проекцій. До таких прямих належать горизонталь, фронталь та профільна пряма, кожна з яких визначається так: горизонталь – пряма, що належить даній площині і паралельна горизонтальній площині проекцій (рис. 3.2., а), фронталь – пряма, що належить даній площині і паралельна фронтальній площині проекцій (рис. 3.2., б), профільна пряма – пряма, що належить даній площині і паралельна профільній площині проекцій. Горизонталь, фронталь та профільну пряму називають **головними лініями площини**. Умовимось позначати горизонталь h (h_1, h_2), фронталь f (f_1, f_2), профільну пряму p (p_1, p_2). Головні лінії площини – це відомі нам горизонталі, фронтальні, профільні прямі, які за умовою належать якійсь заданій площині. Проекція h_2 горизонталі і проекція f_1 фронталі завжди паралельні осі X.

Інші їх проекції розташовані довільно в залежності від положення площини. Сліди площини являють собою відповідно горизонтальну проекцію однієї з горизонталей і фронтальну проекцію однієї з фронталей площини.

До особливих ліній площини треба віднести також лінію нахилу площини, що характеризує нахил даної площини до площини проекцій. Лінією нахилу будемо називати пряму, розташовану в даній площині перпендикулярно головній лінії. Як бачимо з рис. 3.3., пряма l створює зі своєю горизонтальною проекцією l_1 лінійний кут φ, що визначає нахил даної площини до площини Π_1.

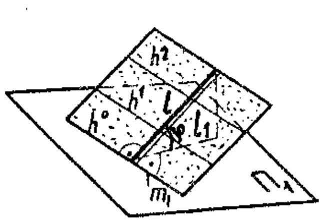


Рис. 3.3.

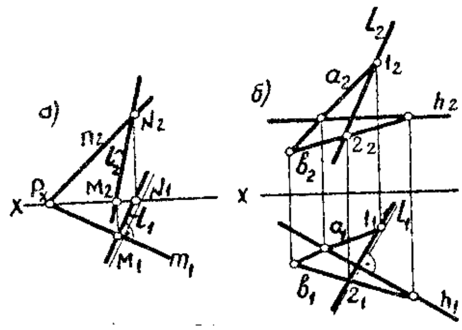


Рис. 3.4.

На кресленні (рис. 3.4.) показано побудову лінії нахилу l (l_1, l_2) площини Σ (m∩n) і площини Т (a∩b). При побудові додержано умови належності площині (M, N та 1, 2 – спільні точки), а також перпендикулярності її горизонталям (кут між l_1 і l_2 прямий). Про ці дві умови треба завжди пам’ятати при побудові лінії нахилу. Через пряму можна провести безліч площин, при цьому кожна з них є відповіддю до задачі “через дану пряму провести площину”. Для вирішення такої задачі (рис. 3.5., а) досить позначити на кресленні довільну точку поза даною прямою. В нашому випадку такою точкою є точка D (D_1, D_2), що разом з прямою а (a_1, a_2) визначає площину, яку ми шукаємо. Кожна нова, довільно взята поза прямою точка, дає нове рішення із безлічі можливих. Якщо потрібно площину, що шукаємо, позначити слідами (рис. 3.5., б), то для цього спочатку будуються сліди M (M_1, M_2) і N (N_1, N_2) даної прямої. Після цього на осі X позначають точку сходу слідів P_x і через неї та горизонтальний слід M_1 прямої проводять горизонтальний слід m_1 площини, а через фронтальний слід N_2 та точку P_x – фронтальний слід n_2 площини.

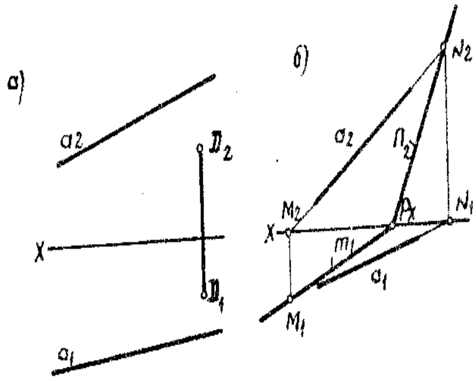


Рис. 3.5.

3.2. Площина і точка взаємно належать, якщо при цьому пряма, що належить заданій площині, проходить через дану точку.

В заданій площині Г ($a \cap b$) (рис. 3.6.,а) треба побудувати (позначити дві проекції) довільну точку. Простішим рішенням серед багатьох стане, очевидно, фіксація на одній із даних прямих площини довільної точки, наприклад, точки А (A_1, A_2) на прямій *a* (a_1, a_2). На кресленні (рис. 3.6., б) дана площина Δ ($a \cap b$) і проекція A_2 точки А. треба побудувати проекцію A_1 за умовою належності цієї точки даній площині. Через A_2 проведена фронтальна проекція $1_2 2_2$ прямої *d* довільно, потім за умовою належності прямої *d* даній площині побудована горизонтальна проекція $1_1 2_1$ прямої і на ній зафіксована проекція A_1.

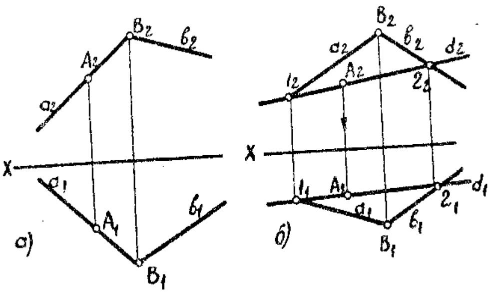


Рис. 3.6.

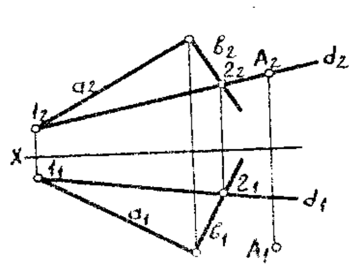


Рис. 3.7.

Якщо потрібно вирішити питання про взаємну належність площини та точки, наперед заданих на кресленні, використовують допоміжну пряму. Таке рішення приведено на кресленні (рис. 3.7.), де задана площина Σ (a∩b) та точка A (A_1, A_2). Після того, як в площині Σ проведена допоміжна фронтально конкуруюча з точкою A пряма d (d_1,d_2), стає очевидним, що точка A не розташована в площині, бо горизонтальна її проекція A_1 не розташована на горизонтальній проекції d_1 прямої. У випадках, коли площина задана слідами, зручно визначати взаємну належність її з точками при допомозі горизонталі або фронталі. Ця зручність обумовлена тим, що дві проекції горизонталі або фронталі проводяться за допомогою однієї точки, якою є слід N (N_1, N_2) або M (M_1, M_2) (рис. 3.9.).

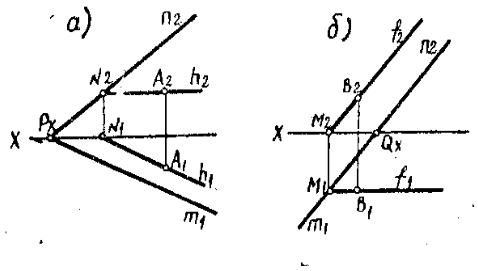


Рис. 3.9.

3.3. Пряма і площина взаємно паралельні, якщо дана площина включає пряму, паралельну заданій прямій. Відповідно до цієї умови рішення будь-якої задачі на паралельність прямої то площини визначається побудовою на кресленні двох паралельних прямих, одна з яких при цьому повинна належати заданій площині. Побудова ж двох прямих спирається на знання умов паралельності прямих та належності прямої площині.

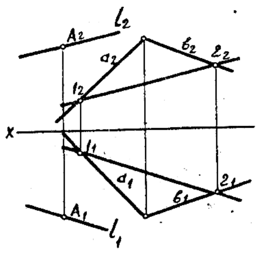


Рис. 3.10.

На кресленні (рис. 3.10.) дана площина Т (a∩b) і точка А (A_1, A_2). Через точку А проведена пряма *l* (l_1, l_2) паралельно даній площині після того, як в цій площині була проведена довільна пряма *d* (d_1, d_2). Очевидно, що через задану точку можна провести безліч прямих, паралельних даній площині. В нашому прикладі через точку А можна провести пряму, паралельну прямій *a* (a_1, a_2) або прямій *b* (b_1, b_2). Якщо на кресленні пряма і площина задані наперед і потрібно визначити, чи паралельні вони, досить через довільну точку площини провести допоміжну пряму паралельно даній прямій. Тільки в тому випадку, коли допоміжна пряма належатиме площині, задані площина та пряма паралельні.

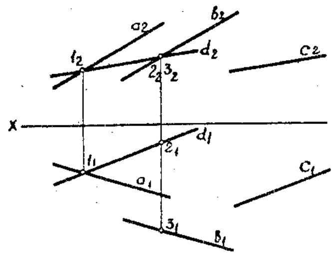


Рис. 3.11.

На кресленні (рис. 3.11) задані площина Σ (a||b) та пряма *c* (c_1, c_2). Для визначення їх паралельності через точку 1(1_1, 1_2) площини проведена допоміжна пряма *d* (d_1, d_2) паралельно прямій *c* ($d_1||c_1$, $d_2||c_2$). Після побудови з'ясувалось, що пряма *d* не належить площині Σ. Це означає непаралельність заданих площини та прямої. В зазначеному випадку можна знайти інше рішення. Провести допоміжну пряму так, щоб вона належала заданій площині. І тоді задана пряма стане паралельною заданій площині у випадку, коли вона паралельна допоміжній прямій.

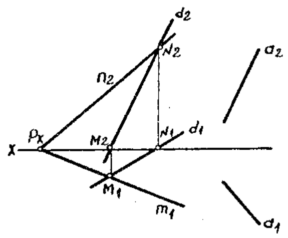


Рис. 3.12.

На кресленні (рис. 3.12.) задана площина Λ(m∩n) та пряма *a* (a_1, a_2). Для визначення паралельності площини та прямої у площині Λ проведена допоміжна пряма *d* (d_1, d_2) так, щоб її проекція d_2 була паралельна проекції a_2 даної прямої. Проекція d_1 допоміжної прямої, підкоряючись умові належності до площини, виявилась не паралельною проекції a_1 даної прямої. Відсутність паралельності однойменних проекцій прямих *a* і *d* показує на відсутність паралельності між прямою *a* та площиною Λ.

3.4. Дві площини паралельні між собою, якщо дві перетинні прямі однієї відповідно паралельні до двох перетинних прямих другої площини. На кресленні (рис. 3.13.) площина Σ (a∩b) паралельна площині Т (c∩d), тому що перетинні прямі a і b площини Σ відповідно паралельні до перетинних прямих *c* і *d* площини Т. У паралельних площин однойменні сліди паралельні (рис. 3.14.), бо вони являють собою ті ж дві пари перетинних прямих.

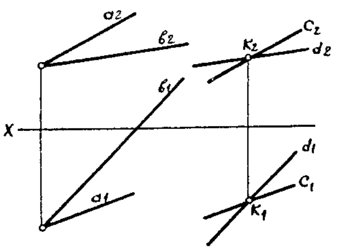


Рис. 3.13.

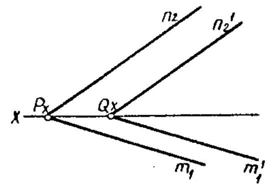


Рис. 3.14.

Контрольні запитання та вправи

1. Зробити комплексні креслення площини загального положення, проекціюючої площини та площини рівня.

2. Визначити умови взаємної належності прямої та площини і точки та площини.

4. Показати на кресленнях пряму, паралельну площині, а також дві паралельні між собою площини.

ЛЕКЦІЯ 4

Лінії, поверхні, тіла.

4.1. Криві лінії

4.2. Криві поверхні

4.3. Геометричні тіла

4.4. Належність точок і ліній поверхням геометричних тіл

Контрольні запитання та вправи

Якщо дивитись з позицій геометрії, то багато об'єктів, які оточують нас, - це лінії, поверхні, тіла. Для них характерна величезна різноманітність форм – від самих простих до складних і вигадливих.

Глибокі математичні визначення лінії, поверхні, тіла не є простими. Ці визначення подаються в курсі топології, однієї з галузей сучасної математики. Ми ж розглянемо такі визначення, які дають можливість вирішувати різні задачі методом проекцій.

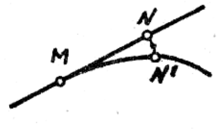


Рис. 4.1.

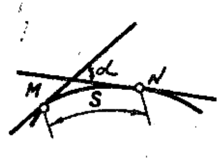


Рис. 4.2.

4.1. Кривою називають будь-яку лінію, кривина якої не дорівнює нулю. Ступінь скривлення лінії або ступінь удаленості точок прямої від свого початкового положення при згинанні цієї прямої в криву називається кривиною (рис. 4.1.). Мірою кривини лінії в будь-якій точці А є відношення $\kappa = \dfrac{\alpha}{s}$ при s→0 (рис. 4.2.). Чим більша величина к поблизу даної точки, тим більше скривлена лінія і тим менше радіус кривини лінії поблизу цієї точки, тобто $k = \dfrac{1}{R}$.

Криві лінії бувають плоскими або просторовими. Важливим характеристичним елементом будь-якої кривої є дотична в кожній її точці. Всі дотичні плоскої кривої в загальному випадку не перетинаються. Будь-яку криву лінію можна уявити і задати на кресленні рядом точок, кількість яких залежить від потрібної точності. Зображення кривої лінії на кресленні зводиться до зображення на ньому ряду точок. На рис. 4.3. показана просторова лінія *a* (a_1, a_2), а на рис. 5.4. – плоскі криві лінії *b* (b_1, b_2) та *d* (d_1, d_2) загального вигляду.

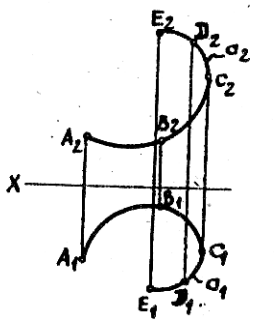


Рис. 4.3.

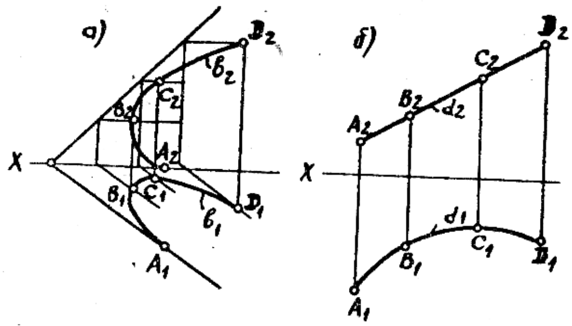


Рис. 4.4.

З групи плоских закономірних кривих ліній велике значення в інженерній практиці мають такі криві, як еліпс, гіпербола та парабола, основні параметри і властивості яких треба завжди твердо знати. Серед просторових кривих велике практичне значення має гвинтова лінія. Вона являє собою траєкторію подвійного руху – обертального навколо осі і поступального уздовж тієї ж осі (рис. 4.5.).

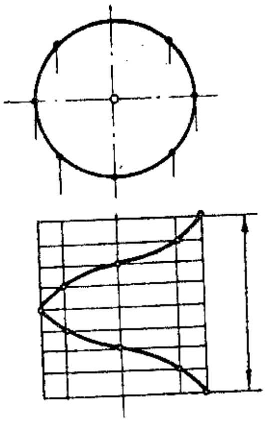


Рис. 4.5.

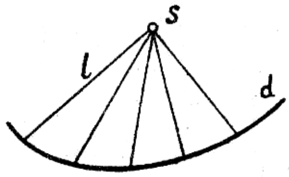


Рис. 4.6.

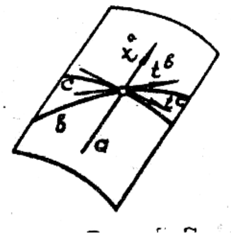


Рис. 4.7.

4.2. Будь-яку поверхню можна уявити як геометричне місце безмежно близьких, послідовних положень лінії, що переміщується. Лінію, яка, переміщуючись, творить поверхню, називають твірною, а елементи, що визначають характер переміщення, - напрямними. На рис. 4.6. показана конічна поверхня, у якої твірною є пряма лінія *l* , а напрямними елементами – точка S та крива лінія *d*. Характеристичною особливістю будь-якої поверхні (рис. 4.7.) і мірою її зігнутості є кривина, яка в різних напрямках в загальному випадку різна. Не вдаючись в глибокий аналіз кривини поверхонь, зазначимо, що визначається вона в будь-якому напрямку кривиною лінії плоского перетину поверхні в заданому напрямку. Серед безлічі існуючих поверхонь особливою є площина, кривина якої в усіх напрямках дорівнює нулю. В зв’язку з цією особливістю площину можна трактувати як особливий випадок кривої поверхні.

Усі поверхні укрупнено можуть бути класифіковані за трьома ознаками в залежності від: 1) виду твірної; 2) закону переміщення твірної; 3) здатності розгортатися, тобто збігатися всіма своїми точками з площиною без розривів і зморшок.

В залежності від виду твірної поверхні поділяються на лінійчаті і нелінійчаті. **Лінійчатими** називаються поверхні, які можуть бути утворені прямою лінією, наприклад, циліндричні, конічні; **нелінійчатими** – такі поверхні, утворити які прямою лінією не можна, наприклад, сфера і багато інших. В залежності від закону переміщення твірної (від складу напрямних елементів) поверхні поділяються на багато різновидів, найголовнішими серед яких є поверхні обертання, гвинтові поверхні та поверхні з площиною паралелізму. В залежності від здатності розгортатись поверхні поділяються на розгортувані (рис. 4.8.) та нерозгортувані. Розгорнути нерозгортувані поверхні можна лише наближено. До розгортуваних поверхонь належать так звані торси, до нерозгортуваних – всі інші, що називаються косими.

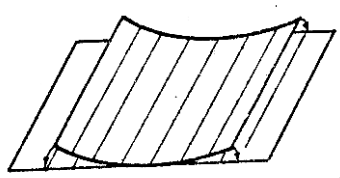


Рис. 4.8.

Торсом називають поверхню, яка твориться переміщенням прямої лінії по кривій так, що в кожному своєму положенні ця прямолінійна твірна залишається дотичною до напрямної кривої. На кресленні (рис. 4.9.) подано торс, в якого напрямною лінією є просторова крива, яку називають ще ребром звороту. Ця напрямна крива є геометричним місцем точок звороту ліній, що задають собою плоскі перерізи торсової поверхні типу перерізу Σ (рис. 4.9.). Коли напрямною є плоска крива, то маємо справу з особливим різновидом торсу, що являє собою звичайну площину.

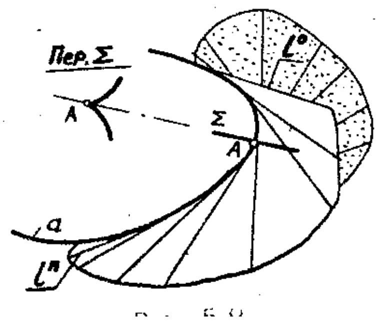


Рис. 4.9.

Особливим випадком стосовно ребра звороту є конічна та циліндрична поверхні. Вони являють собою торси, ребро звороту яких вироджується в першому випадку в точку реальну, а в другому – в безмежно віддалену (рис. 4.10.). Серед торсів, що мають велике розповсюдження в техніці, заслуговує на увагу гвинтовий, або розгортуваний гелісоїд, ребром звороту якого є гвинтова лінія.

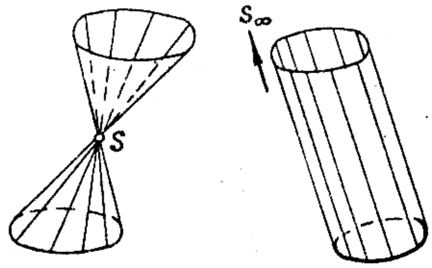


Рис. 4.10.

Поверхні з площиною паралелізму включають в себе циліндроїд, коноїд та гіперболічний параболоїд (коса площина). Ці поверхні утворюються переміщенням по двох напрямних лініях прямолінійної твірної так, що вона в кожний момент переміщення паралельна якійсь площині, яку називають площиною паралелізму (рис. 4.11). Три згадані поверхні з площиною паралелізму відрізняються складом двох напрямних ліній: для циліндроїда – дві криві, для коноїда – крива та пряма, для косої площини – дві прямі. На рис. 4.11. показано напрямні a та b і площину паралелізму Π_1.

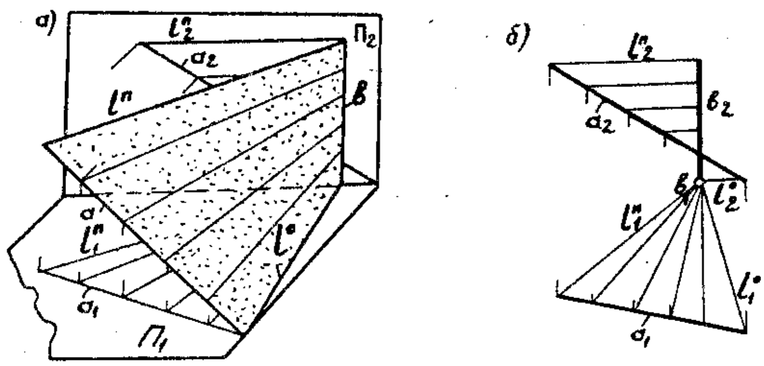


Рис. 4.11.

Поверхні обертання утворюються обертальним рухом твірної навколо якоїсь осі. В залежності від виду твірної вони можуть бути **лінійчатими** і **нелінійчатими**. Головна властивість будь-якої поверхні обертання витікає із сутності обертального руху і полягає в тому, що всі лінії поверхні, розташовані в площині, перпендикулярній осі, являють собою кола (рис. 4.12.). Значне застосування в техніці мають циліндрична, конічна, сферична, торова поверхні обертання (рис. 4.13.).

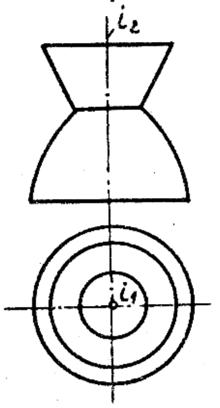


Рис. 4.12.

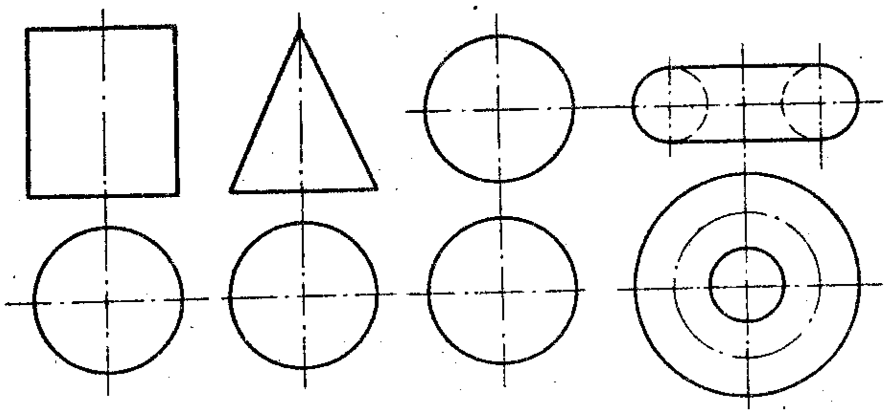


Рис. 4.13.

Поверхня тору утворюється обертанням навколо осі кола, розташованого в одній площині з віссю, яка не проходить через центр кола.

Група поверхонь, що утворені обертанням кривих другого порядку, складається з різних еліпсоїдів, параболоїдів, гіперболоїдів. Останні можуть бути двополими при обертанні навколо дійсної осі гіперболи та однополими при обертанні навколо її уявної осі. Характерною особливістю однополого гіперболоїда є те, що він лінійчатий, тобто може утворюватись обертанням прямолінійної твірної. Однополий лінійчатий гіперболоїд як поверхня обертання споріднений з конічною та циліндричною поверхнями і відмінний від них лише тим, що твірна не перетинається з віссю обертання (рис. 4.14).

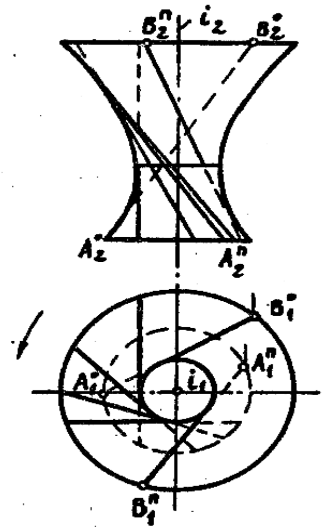


Рис. 4.14.

Гвинтові поверхні, або так звані гелікоїди, утворюються гвинтовим переміщенням твірної. В залежності від напрямку переміщення твірної вони поділяються на праві і ліві. Дуже розповсюджені в техніці лінійчаті гелікоїди, до яких належать **прямий, нахилений** та **торсовий**, або розгортуваний. **Прямим** називається такий, у якого твірна при переміщенні залишається перпендикулярною до осі обертання (рис. 4.15., а); нахиленим – такий гелікоїд, у якого твірна розташована до осі під кутом, що не дорівнює 90° (рис. 4.15., б); торсовим – такий, у якого напрямним елементом для твірної є гвинтова лінія (рис. 4.15., в).

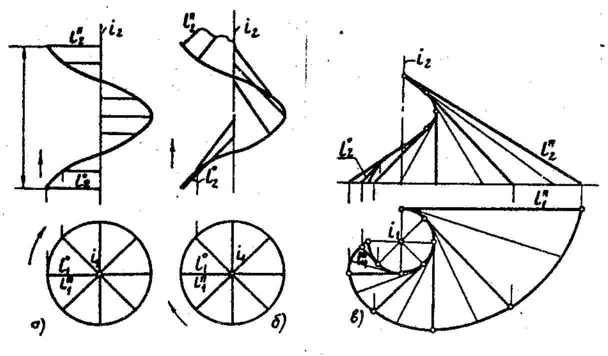


Рис. 4.15.

Зображення будь-якої поверхні на кресленні повинно нести в собі набір точок і ліній, що вичерпно визначають або ж графічно задають цю поверхню на кресленні. Існують три основні види такого задання: **визначником, каркасом** та **обрисом.**

Визначником називають сукупність умов, що однозначно задають поверхню. Для конічної, наприклад, поверхні визначник складається з точки і напрямної кривої, для циліндричної – із прямолінійної твірної і напрямної кривої. Якщо конічну поверхню позначити через Г, а циліндричну через Δ, то записати ці поверхні треба так: Г (S, n), Δ (l, m). Визначник складається з двох частин, одну з яких називають геометричною частиною визначника (ГЧВ), другу – алгоритмічною (АЧВ). ГЧВ – це сукупність геометричних елементів, що визначають поверхню. Сукупність може включати в себе як елементи, розташовані на поверхні, так і елементи, розташовані поза нею. АЧВ – це, як правило, закон утворення поверхні, часто повністю окреслений її назвою. Повний визначник, наприклад, сфери, складається з прямої, що лежить в площині кола і проходить через його центр, та напису "Сфера", де пряма і коло – геометрична частина визначника, а нарис – його алгоритмічна частина (рис. 4.16.).

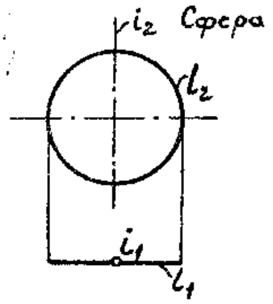


Рис. 4.16.

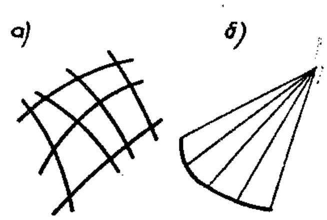


Рис. 4.17.

Каркасом називають сукупність точок та ліній, вибраних на поверхні таким чином, щоб існувала можливість точного уявлення про форму поверхні (рис. 4.17.). Каркаси можуть бути точковими і лінійними. Застосовуються вони переважно для зображення на кресленні незакономірних поверхонь.

Обрисом є лінія на полі проекцій, одержана перетином цього поля з поверхнею (циліндричною або призматичною) проекціюючих променів, що обгортають об’єкт, який проекціюється (рис. 4.18.). Зазначена проекціююча променева поверхня створює на поверхні об’єкта, який проекціюють, лінію дотику, котру називають контуром. Обрис, таким чином, є проекцією контуру. На кресленнях задані поверхні:

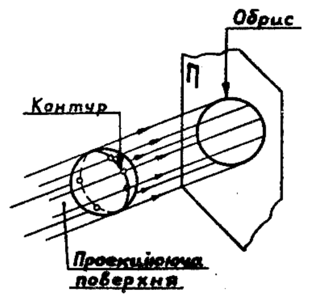


Рис. 4.18.

визначником – коса площина на торс (рис. 4.19., а, б);

каркасом – циліндр та циліндроїд (рис. 4.20., а, б);

обрисом – сфера та конус (рис. 4.21., а, б).

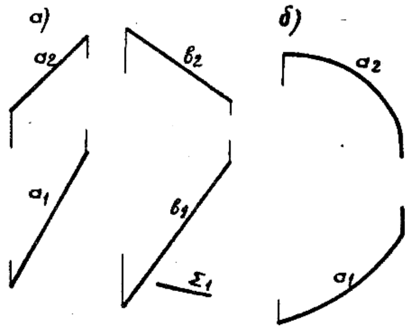


Рис. 4.19.

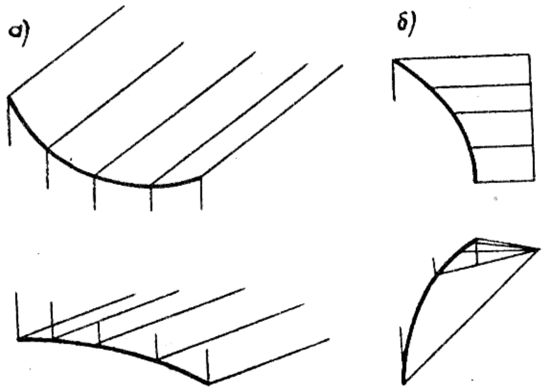


Рис. 4.20.

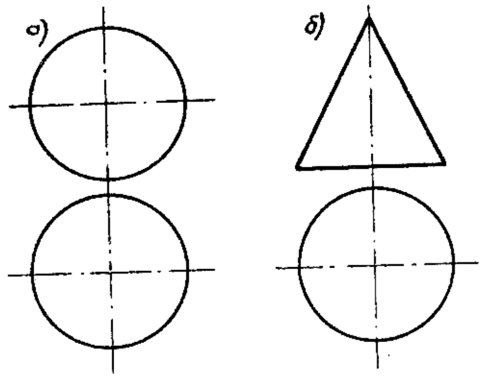


Рис. 4.21.

При зображенні поверхонь потрібно мати на увазі, що найсуттєвішим для кожного випадку є неухильне додержання умов інцидентності поверхні з точкою і лінією. Задані умови інцидентності реалізуються тут аналогічно уже відомим умовам інцидентності точки і прямої з площиною. Вони можуть бути сформульовані так: точка належить поверхні, якщо вона належить лінії, розташованій на поверхні, якщо вона проходить через ряд точок, що знаходяться на поверхні.

4.3. Тілом називається частина простору, обмежена замкнутою поверхнею. Дуже часто поверхня, що обмежує тіло, складається з набору поверхонь різних видів. В цьому випадку тіла є комбінованими. Тіла, поверхня яких обмежена і складається лише з плоских елементів (граней), називаються багатогранниками. Побудова проекцій тіл на кресленні – це, як правило, побудова проекцій контурних ліній цих тіл при заданому напрямку проекціювання.

Частіше за все доводиться виконувати проекції (види) головних геометричних тіл, до яких належать конус, циліндр, піраміда, призма, куля, тор. Умовимося всі елементи тіл на кресленні координувати відносно площин, паралельних площинам проекцій, але зв'язаних безпосередньо з даним тілом. Тобто будемо дотримуватися не зовнішньої, а внутрішньої координації. Для циліндра (рис. 4.22) система **x, y, z** являє координатну систему площин проекцій і є системою зовнішньої координації даного тіла. Осі внутрішньої координації x', y' , z' на кресленні зображаються штрих-пунктирними (осьовими) лініями, і, як правило, літерами не позначаються (рис.). Для симетричних тіл площини внутрішньої координації являються площинами їх симетрії, а для тіл, у яких симетрія часткова або відсутня, площини координації (осі) "прив'язують" до якогось елемента тіла (точки, ребра, грані) (рис.). Внутрішня координація є особливо зручною не лише при побудові проекцій, але і при виготовленні деталей.

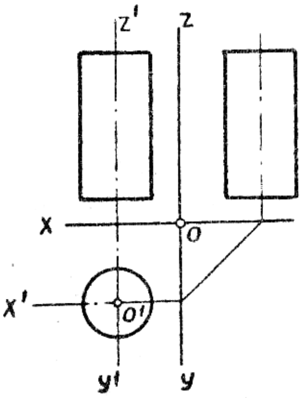


Рис. 4.22.

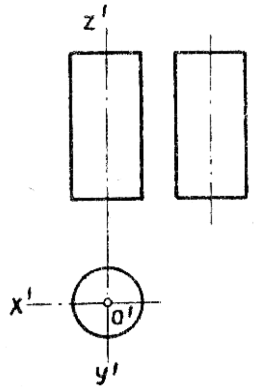


Рис. 4.23.

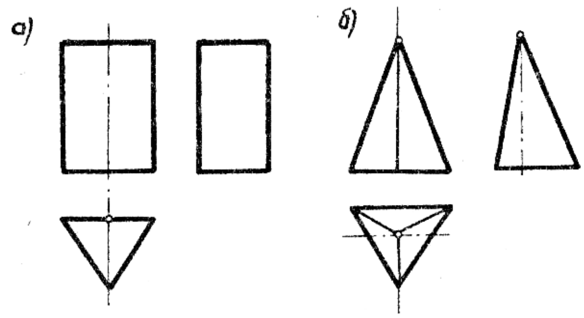


Рис. 4.24.

4.4. При побудові проекцій тіл необхідно набути уміння і навичок будувати три проекції якої завгодно точки або лінії, розташованих на поверхні тіла. На заданому конусі (рис.) треба побудувати проекції якоїсь точки A на його поверхні. Поставлена задача може бути вирішена за допомогою прямої s_1 *($s_1 1_1$, $s_2 1_2$)*, проведеної на поверхні конуса та позначення на ній довільної точки A. таке ж рішення, але для іншої точки B (B_1, B_2) подано за допомогою лінії *a (a_1, a_2)*, проведеної на поверхні конуса паралельно його основі. Аналогічно вирішується і задача відносно піраміди (рис.) з тією різницею, що можливостей для проведення простішої лінії на поверхні тут більше, бо всі проекції прямих на поверхні піраміди є прямими, які зручно прийняти за допоміжні лінії. У прямого циліндра та прямої призми обмежуючі поверхні прекціюються в лінії і це зручно для відшукування проекцій точок та ліній. на кресленні (рис. 4.26) за заданою фронтальною A_2 проекцією точки А, що розташована на поверхні кулі, побудована горизонтальна A_1 проекція з допомогою кола **а (a_1, a_2),** проведеного через А (A_2).

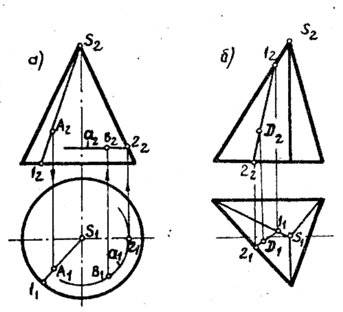


Рис. 4.25.

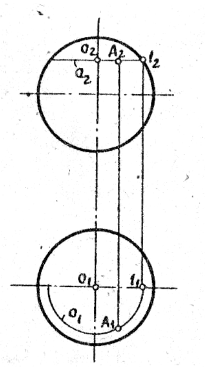


Рис. 4.26.

На кресленні (рис. 4.27) по заданій фронтальній проекції B_2 точки В і горизонтальній проекції C_1 точки С, що лежать на поверхні конуса, знайдені горизонтальна B_1 та фронтальна C_2 проекції при допомозі твірної конуса S_1 та кола радіуса $S_1 2_1$. В особливих випадках, коли точка розташована на обрисовій лінії або на лінії, що збігається з віссю симетрії, одна, а інколи і дві проекції точки визначаються без допоміжних ліній (рис. 4.28).

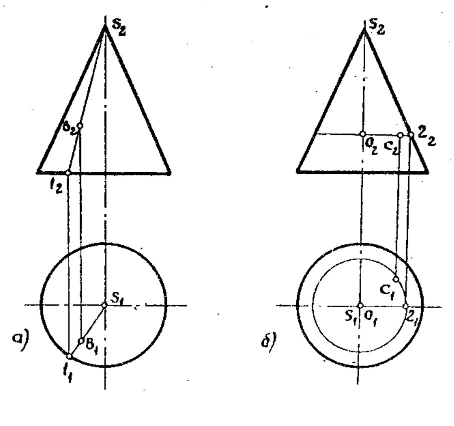


Рис. 4.27.

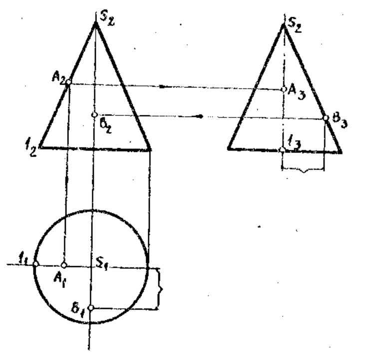


Рис. 4.28.

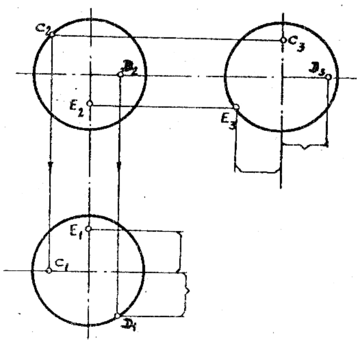


Рис. 4.29.

Горизонтальна A_1 та профільна A_3 проекції точки A знайдені без допоміжних побудов, тому що всі три проекції твірної S_1 конуса можна зафіксувати на кресленні. На тій же підставі можна знайти недостатні проекції B_1 і B_2 точки B (рис.), а також установити проекційний зв'язок між трьома проекціями точок C, D, E (рис.). Точка C лежить на головному фронтальному меридіані, який на горизонтальній проекції збігається з горизонтальною віссю. Точка D лежить на екваторі, а точка E – на головному профільному меридіані кулі.

Необхідно мати на увазі, що проекції деяких ділянок знайдених ліній визначаються також без допоміжних побудов, якщо вони розташовані особливим способом відносно площин проекцій. На кресленні (рис.) лінія *a* (a_1, a_2, a_3) на поверхні сфери розташована паралельно горизонтальній площині проекцій і зображена на ній у вигляді кола, концентричного з обрисом, а на фронтальній та профільній проекціях – прямими, паралельними відповідним осям. Лінія *b* (b_1, b_2, b_3) паралельна фронтальній площині проекцій, бо її фронтальна проекція – дуга кола, концентричного з обрисом сфери. Лінія *a* (рис.) знаходиться на поверхні конуса і проекціюється на площину $П_1$ в коло, а на дві інші площини проекцій – в прямі.

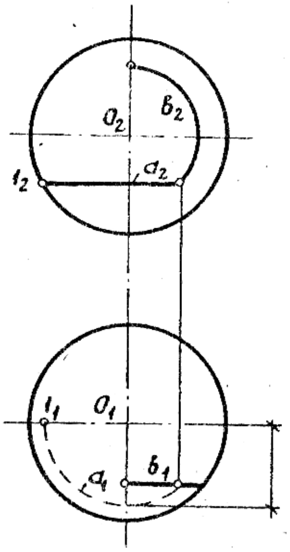


Рис. 4.30.

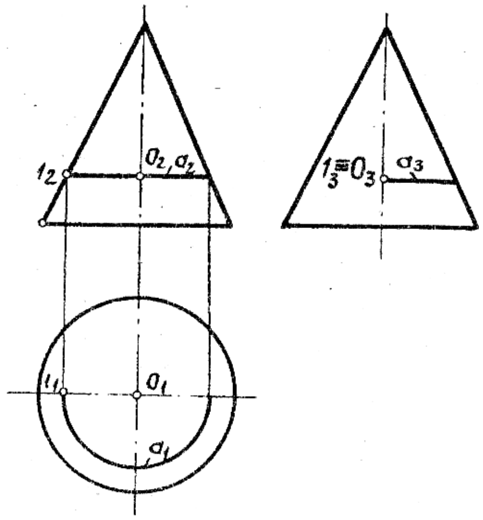


Рис. 4.31.

Приклад 1.

Припустимо, що дано фронтальну проекцію сфери та на її поверхні замкнену лінію ABDEFA (рис.). Для побудови горизонтальної і профільної проекцій позначимо ще проміжні точки C, L, G, K (C_2, L_2, K_2). Проекції точок A, B, D, E, L, F, G визначаються без допоміжних побудов, бо вони знаходяться на лініях, всі проекції яких зафіксовані на трьох проекціях сфери. Точки К та С розташовані на поверхні сфери так, що для визначення їх проекцій необхідно виконати на кресленні допоміжні побудови. Через точки К та С проведено на сфері лінію d (d_1, d_2, d_3) паралельно горизонтальній площині проекцій. Ця лінія на $П_2$ і $П_3$ проекціюється в прямі d_2 і d_3 паралельно горизонтальній осі, а на площину $П_1$ в коло d радіусом 12 (1_1, 2_1). Проекції K_1 та C_1 розташуються на проекції d_1 кола, а K_3 та C_3 – на проекції d_3 лінії d.

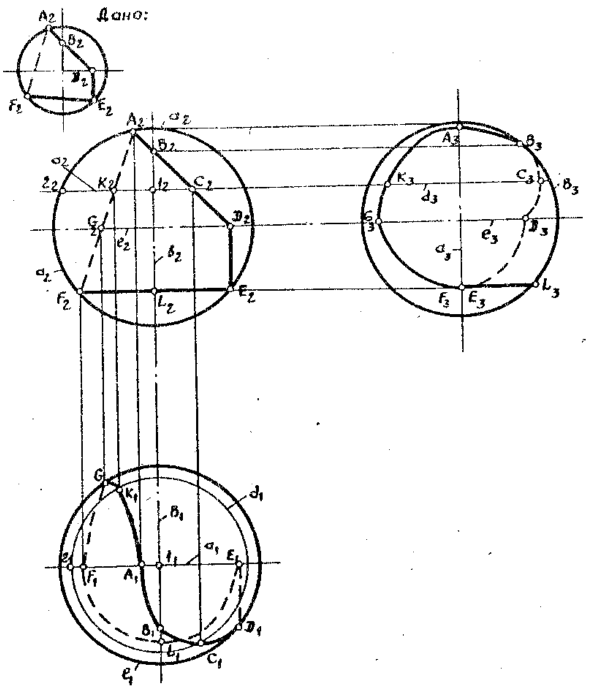


Рис. 4.32.

Приклад 2.

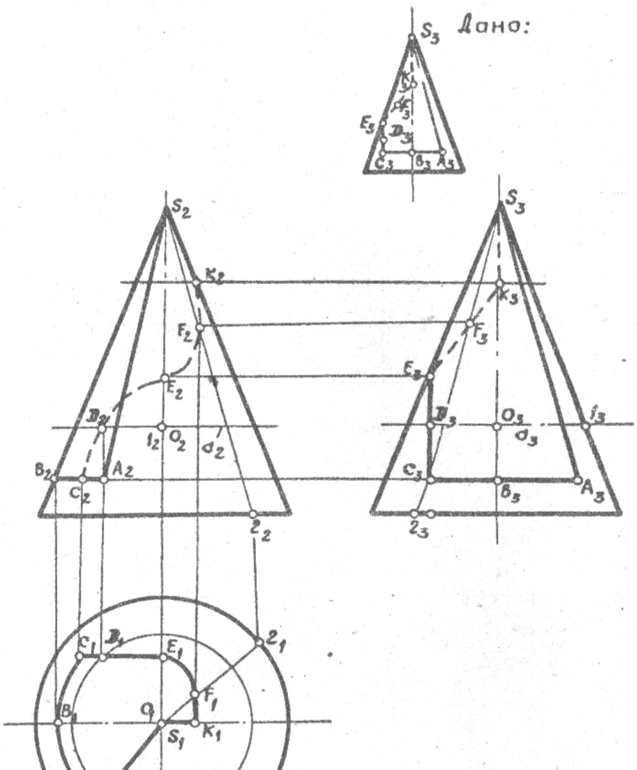


Рис. 4.33.

На кресленні (рис. 4.33) дано профільну проекцію конуса та лінію ABCDEFKSA на його поверхні. Проекції точок A, B, C, E, K визначаються без суттєвих допоміжних побудов. Для визначення проекцій D_2 та D_1 через D_3 проведена лінія *a* (a_1, a_2, a_3) на поверхні конуса паралельно площині Π_1. Ця лінія – коло радіуса O1. Проекції розташуються на однойменних проекціях a_1 та a_2 лінії a з додержанням проекційного зв'язку.

Для визначення проекцій F_1 та F_2 точки F через F_3 спочатку проведена профільна проекція $S_3 2_3$ твірної конуса, а потім при допомозі точки 2 побудовані горизонтальна $S_1 2_1$ та фронтальна $S_2 2_2$ проекції твірної. На однойменних проекціях побудованої твірної зафіксовані проекції F1 та F_2 точки F.

Контрольні запитання та вправи.

1. Зробити комплексні креслення плоскої та просторової кривих ліній.
2. Навести укрупнену класифікацію поверхонь.
3. Побудувати креслення відомих поверхонь з використанням визначника, каркасу, обрису.
4. Показати проекції тіл, що обмежені різними поверхнями.

ЛЕКЦІЯ 5

Перетин геометричних фігур

5.1. Уявлення про посередник

5.2. Перетин площин

5.3. Перетин прямої лінії з площиною

5.4. Перетин геометричного тіла проекціюючою площиною

5.5. Конічні перерізи

5.6. Перетин прямої лінії з поверхнею

Геометричні фігури (точки, лінії, поверхні, тіла) мають різне положення (різну позицію) в просторі. При цьому вони можуть належати або не належати одна одній, а також перетинатися. Зазначимо, що під позиційними розуміються задачі, рішення яких дозволяє одержати відповідь на запитання про належність (інцидентність) фігур або їх частин та про перетин фігур.

Фігури, перетинаючись, мають спільні між собою елементи. При цьому в різних випадках спільними елементами можуть бути: одинична точка – при перетині двох прямих або прямої з площиною; кілька точок (частіше - дві) – при перетині прямої з поверхнею; пряма лінія – при перетині двох площин; комбінована лінія – при перетині між собою в різних комбінаціях площин і кривих поверхонь.

5.1. Перетин фігур дає спільні елементи. При побудові цих елементів на кресленні з'являється необхідність вдаватися до допоміжних геометричних об'єктів, або до так званих посередників. Посередниками частіше всього бувають площини, а в деяких випадках також і криві поверхні, такі як сфера, а іноді – циліндрична і конічна поверхні. Суть застосування посередника полягає в тому, що, вводячи його в контакт з фігурами, які перетинаються, і розташовуючи фігури зручно для вирішення задачі, визначаємо спочатку спільні елементи посередника з кожною із заданих фігур, а потім знаходимо елементи, спільні для двох заданих фігур.

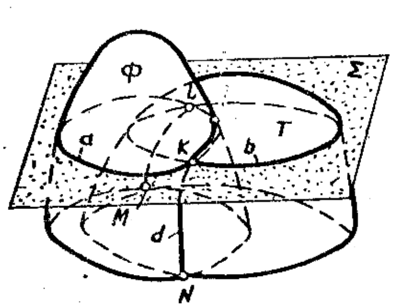


Рис. 5.1.

При визначенні лінії перетину поверхонь Ф і Т (рис.) посередником є площина Σ. Ця площина-посередник перетинає поверхню Ф по лінії *a* і поверхню Т по лінії *b*. Лінії *a* та *b* перетинаються між собою, бо лежать в одній площині-посереднику. Точки перетину K та L ліній *a* і *b* тепер виявляються спільними і для поверхонь Ф і Т. так, застосовуючи кожного разу новий посередник, ми будемо визначати нову пару спільних точок для поверхонь Ф і Т. Геометричне місце знайдених таким чином спільних точок дає лінію перетину *d*, яку шукаємо.

5.2. Дві площини перетинаються по прямій лінії. Щоб побудувати цю лінію на кресленні, досить знайти на ньому дві точки, належні заданим двом площинам.

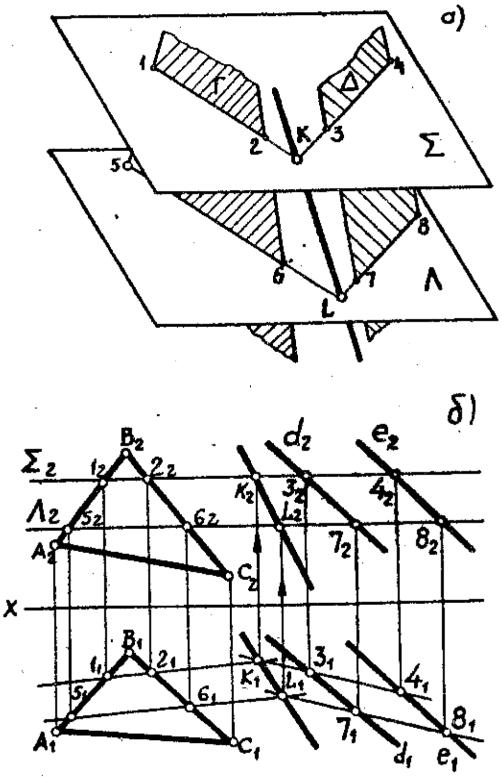


Рис. 5.2.

Для визначення точок необхідно скористатись двома площинами-посередниками Σ та Λ (рис.). Площини Σ та Λ перетнуть дві задані площини Г та Δ по прямих 12, 34 та 56, 78. Прямі 12, 34 лежать в площині Σ і перетинаються в точці К, що належить трьом площинам і лінії перетину. Другу точку L, спільну для обох площин, будемо мати, застосувавши другу площину-посередник – площину Λ.

На кресленні (рис.) площина Г задана трикутником АВС, а площина Δ – паралельними прямими *d* та *e*. Для визначення точки К ($К_1$, $К_2$) проводимо фронтальний Σ_2 слід – проекцію горизонтальної площини Σ. Ця площина перетинає площину трикутника по горизонталі 12, а площину паралельних прямих – по горизонталі 34. Горизонтальні проекції $1_1 2_1$ та $3_1 4_1$ цих горизонталей, перетнувшись, дають горизонтальну проекцію $К_1$ точки К, що належить лінії перетину даних площин. Фронтальну проекцію $К_2$ точки К знайдемо, провівши лінію проекційного зв’язку до перетину з Σ_2 площини Σ. Друга точка, що визначить лінію перетину, - точка L знайдена за допомогою площини Λ. Замість горизонтальних площин-посередників можна скористатись фронтальними і тоді дві необхідні нам точки стануть результатом перетину фронталей тих площин, що перетинаються.

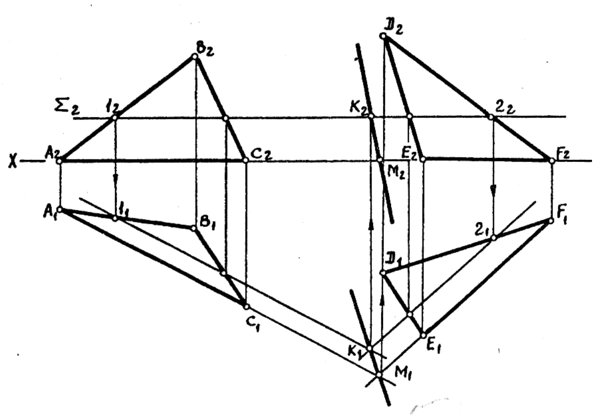


Рис. 5.3.

Визначимо лінію перетину площин, заданих трикутниками АВС та DEF (рис.). Одна із сторін кожного трикутника розташована в горизонтальній площині проекцій $П_1$. Очевидно, що лінія EF площини DEF та лінія АС площини АВС перетинаються між собою, бо лежать в одній площині. Точка перетину М ($М_1$, $М_2$) цих прямих є однією з точок лінії перетину. Другу точку К ($К_1$, $К_2$) одержимо за допомогою горизонтальної площини-посередника Σ (Σ_2). Лінії AC та EF в задачі, що розглядаємо, є горизонтальними слідами заданих площин.

5.3. Будь-яка пряма, непаралельна площині, має з останньою одну спільну точку – точку перетину. Припустимо, що задана площина Δ та пряма *a* (рис.). Необхідно визначити точку їх перетину О. При розв'язанні такої задачі треба керуватись послідовністю:

- через пряму провести допоміжну площину;
- знайти пряму перетину даної площини з допоміжною;
- зафіксувати точку перетину даної прямої з побудованою прямою перетину площин.

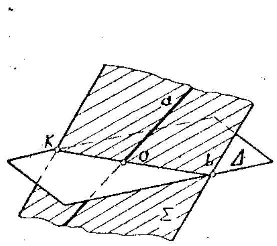


Рис. 5.4.

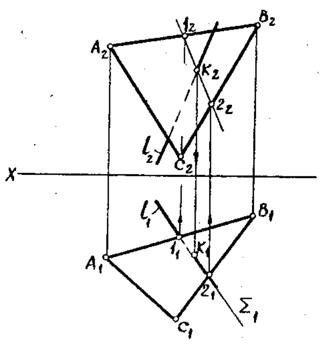


Рис. 5.5.

На кресленні (рис.) показані побудови, необхідні для визначення точки перетину прямої *l* з площиною АВС. Ці побудови мають таку послідовність. Спочатку через пряму *l* проведена горизонтально проекціююча площина Σ, чому на кресленні відповідає збіг Σ_1 з l_1. А далі побудована пряма перетину 12 площини АВС з площиною Σ та зафіксована точка перетину К ($К_1$, $К_2$). З горизонтальним слідом-проекцією Σ_1 на кресленні збігається, крім горизонтальної проекції l_1 прямої, також і горизонтальна проекція $1_1 2_1$ прямої перетину. В просторі ж пряма перетину 12 і задана пряма *l* не збігаються. В цьому легко впевнитись, якщо подивитись на фронтальні проекції $1_2 2_2$ і l_2.

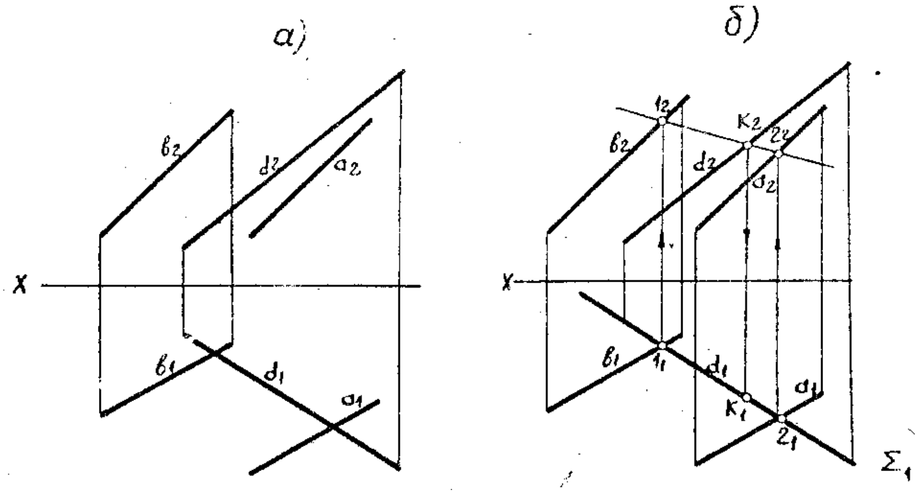


Рис. 5.6.

На рис. показана побудова точки перетину прямої *d* з площиною, заданою паралельними прямими *a* та *b*. Спочатку через пряму *d* проведена допоміжна горизонтально проекціююча площина Σ (слід-проекція Σ_1 збігається з проекцією d_1), потім побудована пряма перетину 12 ($1_1 2_1$, $1_2 2_2$) площини Г (a||b) з площиною Σ (Σ_1), далі зафіксована і позначена точка К (K_1, K_2) перетину прямої *d* з площиною Г.

У випадку, коли площина задана слідами, треба мати на увазі, що сліди площини являють собою пару прямих, які перетинаються на осі проекцій. На кресленні (рис.) показана побудова точки перетину (зустрічі) прямої *a* (a_1, a_2) з площиною $\Delta(m \cap n)$, заданою слідами. І тут побудова йде за тією ж послідовністю: проведена допоміжна горизонтально проекціююча площина Σ (Σ_1), побудована пряма перетину MN (M_1N_1, M_2N_2) площин Δ та Σ, зафіксована спочатку фронтальна проекція K_2, а потім горизонтальна K_1 точки К перетину.

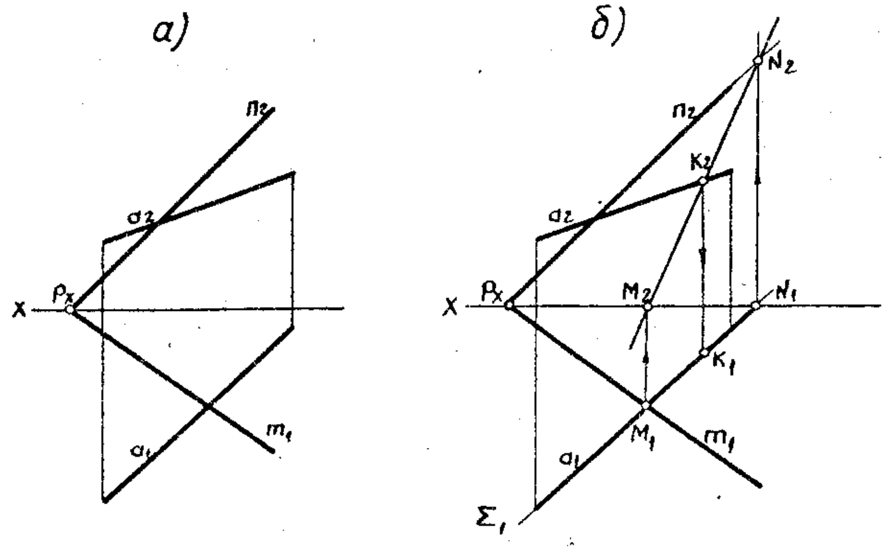


Рис. 5.7.

Побудова точки перетину прямої з проекціюючою площиною значно спрощується, бо в цьому випадку проекція заданої площини на одну з площин проекцій є пряма лінія. Тому точка перетину фіксується “автоматично” на одній з площин проекцій в момент, коли фіксуються на кресленні задані пряма та площина. На кресленні (рис.) задана фронтально проекціююча площина Σ (Σ_2) та пряма *a* (a_1, a_2). Цим уже зафіксована фронтальна проекція K_2 точки перетину K даних прямої і площини. Проекція K_1 точки, що шукаємо, належить проекції a_1 прямої. На кресленні (рис.) показано перетин прямої з горизонтально проекціюючою площиною ABC.

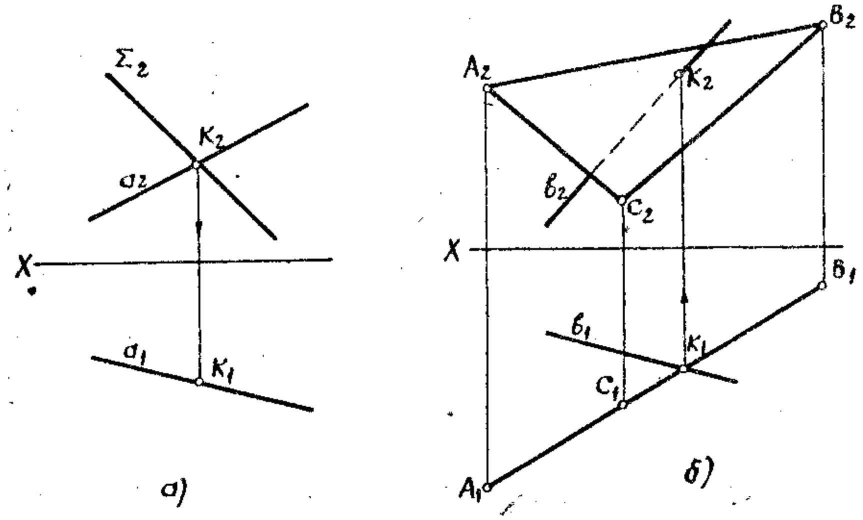


Рис. 5.8.

5.4. Побудова проекції лінії перетину в цьому випадку здійснюється простіше, бо одна із проекцій лінії збігається зі слідом-проекцією площини. На кресленні (рис.) зображено нахилений циліндр, що перетинається проекціюючою площиною Σ (Σ_2). Після нанесення кількох твірних циліндра на сліді січної площини фіксуються фронтальні проекції A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 точок зустрічі твірних з площиною, а потім і горизонтальні A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. На кресленні (рис.) здійснено побудову лінії перетину поверхні піраміди проекціюючою площиною.

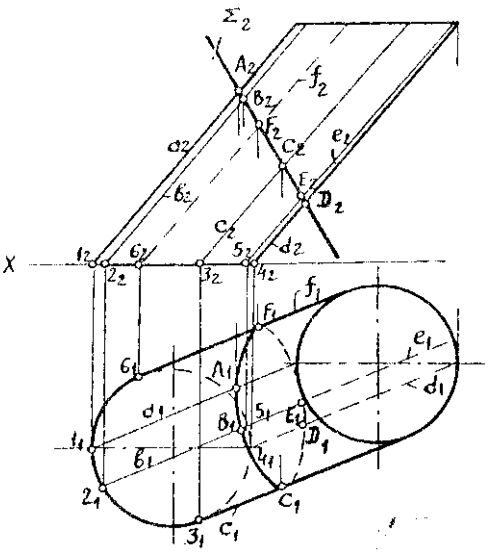


Рис. 5.9.

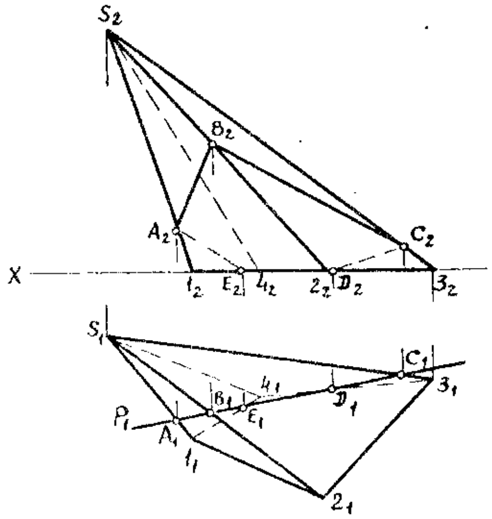


Рис. 5.10.

Фронтальною проекцією лінії перетину поверхні кулі горизонтально проекціюючою площиною є еліпс, побудову якого можна вести за його осями або по окремих точках (рис.). При побудові еліпса треба мати на увазі, що його мала вісь по величині є фронтальною проекцією діаметра кола перетину, а велика вісь є діаметром цього кола. Якщо лінію перетину будувати за допомогою окремих точок, тоді кожна з точок визначається при допомозі січних площин так, як на кресленні визначені точки К (K_1, K_2) та L (L_1, L_2) за допомогою площини Ω (Ω_1).

5.5. Візьмемо конус обертання (рис.) і перетнемо його площинами з такою орієнтацією:

площина Δ (Δ_2) перетинає всі твірні конуса;

площина Γ (Γ_2) паралельна єдиній твірній;

площина Σ (Σ_2) паралельна двом твірним;

площина Λ (Λ_2) проходить через вершину.

Результатом перетину будуть: в першому випадку еліпс (коло в тому числі), в другому – парабола, в третьому – гіпербола, в четвертому – дві перетинні прямі.

Вид конічного перерізу може також визначатися порівнянням величини кута φ, утвореного слідом січної площини і віссю конуса, з величиною кута θ, що являє собою половину кути при вершині конуса. Якщо $\varphi>\theta$, то результат перетину – еліпс (в тому числі коло);

якщо $\varphi=\theta$, - парабола;

якщо $\varphi<\theta$, - гіпербола.

Величина будь-якого конічного перерізу може бути побудована за допомогою двох координат.

Зупинимось на визначенні величини малої та великої осей еліптичного розрізу. На кресленні (рис.   ) дано прямий конус обертання і його січну площину Γ (Γ_2). Очевидно, що великою віссю еліпса перерізу стане відрізок сліду площини, що міститься між обрисовими твірними конуса. Мала вісь проходить через середину великої і в даному випадку перпендикулярна площині Π_2. Щоб визначити величину малої осі досить через точку середини великої осі провести допоміжну січну площину Ω (Ω_2) і побудувати коло радіуса 01. Відрізок АВ (A_1B_1) лінії перетину площин Ω та Γ – мала вісь.

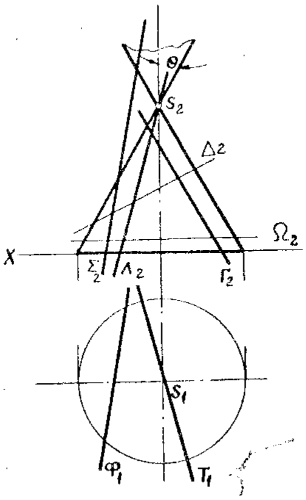


Рис. 5.12.

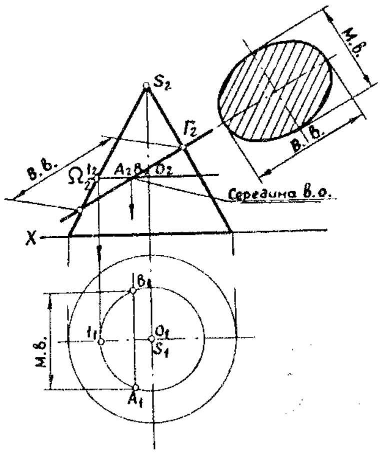


Рис. 5.13.

5.6. Перетин прямої з поверхнею вище розглядався, але то був особливий випадок і мав відношення лише до поверхні першого порядку, тобто до площини. При перетині прямої з поверхнями загального виду рішення значно ускладнюється, хоч послідовність його залишається тією ж самою:

- через пряму проводиться площина-посередник;
- відшукується лінія перетину площини-посередника з поверхнею даного тіла;
- фіксується точка перетину даної прямої зі знайденою лінією перетину.

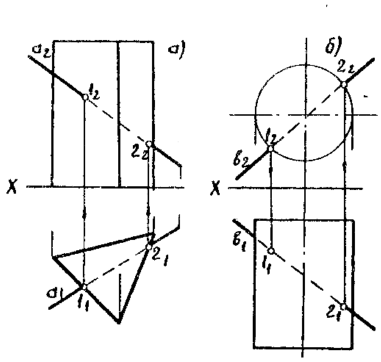


Рис. 5.14.

Коли поверхня тіла проекціююча, точка перетину визначається без допоміжних побудов. На кресленнях (рис.) зображені тригранна призма і циліндр, бокові поверхні яких складаються з проекціюючих поверхонь. Горизонтальні проекції 1_1 та 2_1 точок перетину прямої *a* (a_1, a_2) з поверхнею призми (рис.) фіксуються безпосередньо на проекції a_1 прямої. Фронтальні проекції 1_2 та 2_2 фіксуються на a_2, користуючись проекційним зв'язком. Для визначення точок зустрічі прямої а (a_1, a_2) з нахиленою призмою (рис.) через пряму проведено допоміжну фронтально проекціюючу площину Σ (Σ_2), знайдено лінію перетину ABC площини Σ з поверхнею призми, а потім – самі точки перетину 1 $(1_1, 1_2)$ та 2 $(2_1, 2_2)$.

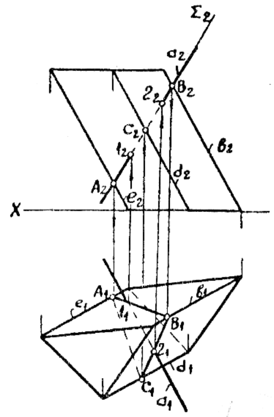


Рис. 5.15.

Раціональне вирішення задачі, поставленої в загальному вигляді, залежить від того, чи дає площина-посередник прості лінії-посередники. На кресленні (рис.) проведено площину-посередник через вершину конуса S (S_1, S_2) і точку К (K_1, K_2), довільно взяту на заданій прямій *a* (a_1, a_2). Площину-посередник, таким чином, орієнтовано так, що вона перетинає конус по простій ламаній – трикутнику. Для побудови цього трикутника визначимо слід m_1 площини-посередника, який пройде через сліди M_1 та $\overline{M}_1$ прямих *a* та *SK*. Відрізок EF сліду m_1 з вершиною S конуса задають необхідний трикутник. Січна пряма *a*, розташовуючись в площині трикутника, перетинається з SE та SF і дає точки 1 $(1_1, 1_2)$ та 2 $(2_1, 2_2)$ зустрічі прямої *a* з поверхнею конуса. Пряма на горизонтальній проекції в межах дільниці $M_1 1_1$ видна, а потім входить в тіло і, вийшовши з нього в точці 2_1, залишається невидною на невеликому відрізку, бо закрита конусом. На фронтальній проекції обидві точки невидні.

На кресленні (рис.) подано аналогічне рішення для нахиленого циліндра, де пряма КМ (K_1M_1, K_2M_2) проведена паралельно твірним. Побудувавши слід *m* (m_1)

площини-посередника, позначимо точки C (C_1) та D (D_1) перетину сліду з основою циліндра. Через ці точки паралельно твірним проведені прямі *d* (d_1) та *e* (e_1), що є лініями перетину площини-посередника з поверхнею циліндра. Точки 1_1 і 2_1 перетину d_1 та e_1 з a_1 – горизонтальні проекції точок зустрічі даної прямої з циліндром.

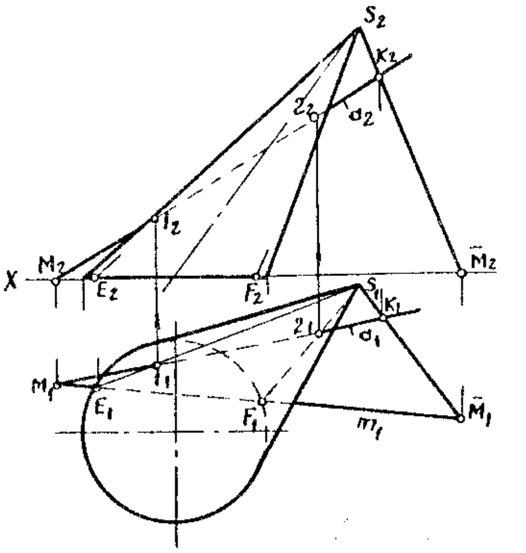


Рис. 5.16.

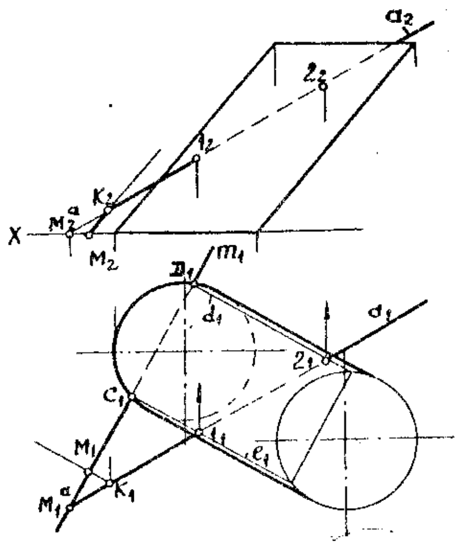


Рис. 5.17.

<u>Лекція 6</u>

Взаємний перетин поверхонь

6.1. Метод січних площин

6.2. Метод сфер

Контрольні запитання та вправи

При визначенні ліній перетину поверхонь тіл необхідно пам'ятати, що проекції цієї лінії не можуть розташовуватись за межами поля накладання однойменних проекцій тіл. Якщо маємо фронтальні проекції Φ_2 і T_2 тіл Ф і Т (рис.), то всі точки лінії перетину будуть розташовуватись в межах заштрихованого поля.

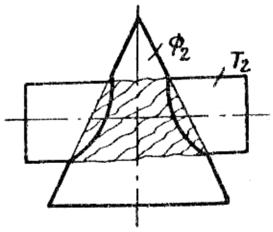


Рис. 6.1.

Визначаючи лінію перетину граних та кривих поверхонь, ми зустрічаємось з двома більш простими позиційними задачами – перетином поверхні з площиною та поверхні з прямою. При перетині граних поверхонь між собою визначаємо точки зустрічі ребер однієї з гранями другої або навпаки. Якщо при цьому одне з тіл має набір горизонтально або фронтально проекціюючих поверхонь, то розв'язання здійснюється відносно просто. Такий випадок показано на кресленні (рис.), де у поверхню призми входять горизонтально проекціюючі бічні грані, з якими точки зустрічі 1, 2, 3, 4, 5, 6 ребер піраміди визначаються без допоміжних побудов.

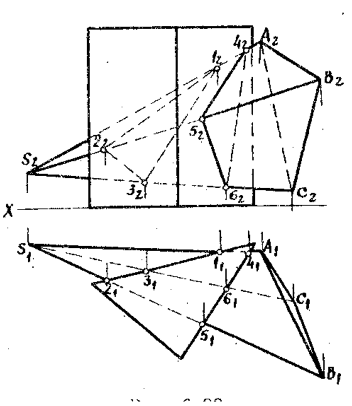


Рис. 6.2.

На кресленні (рис.) маємо прямий круговий конус та призму. При побудові лінії перетину використовуємо тепер фронтально проекціююче положення граней призми. Тут фронтальні проекції лінії перетину і граней збігаються. Горизонтальна проекція будь-якої точки лінії перетину може бути знайдена за допомогою твірних конуса або січних горизонтальних площин. Точки 7 та 8 визначені за допомогою твірних SA та SB, а точки 1, 2, 3, 4 – за допомогою горизонтальних площин Σ та T.

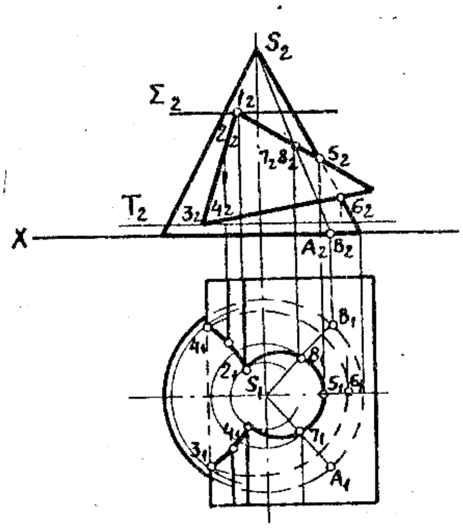


Рис. 6.3.

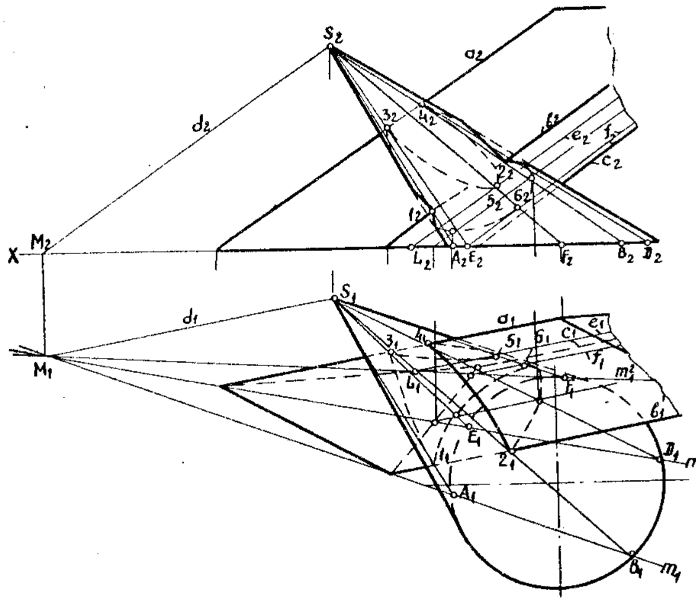


Рис. 6.4.

6.1. при визначенні ліній перетину лінійчатих поверхонь зручно використовувати засіб пучка площин-посередників. На кресленні (рис.) задані нахилені конус та призма. Проведемо через вершину конуса пряму d (d_1, d_2) паралельно ребрам призми, потім через цю пряму проведемо пучок площин. Із безлічі площин, що проходять через пряму d, можуть бути посередниками лише ті, що перетинають одночасно і конус, і призму. Ця частина пучка визначається тією частиною горизонтальних слідів площин, що одночасно перетинають горизонтальні сліди даних поверхонь. Сліди m_1 та m_1^2 будуть слідами площин, що є двома межами потрібної нам частини площин-посередників. Одна з площин пройде через ребро b (b_1, b_2) призми (m_1 – її слід), а друга (m_1^2 – її слід) – через твірну SF конуса. Із проміжних площин-посередників проведена лише площина через ребро a (a_1, a_2) призми (її слід m_1^1). Площина, що проходить через ребро b (b_1, b_2) призми, перетне поверхню конуса по твірних SA, SB, які перетинаючись з ребром, дадуть точки 1 $(1_1, 1_2)$ та 2 $(2_1, 2_{,2})$. Точки 3 $(3_1, 3_2)$, 4 $(4_1, 4_2)$ визначені за допомогою площини, проведеної через ребро a (a_1, a_2), що перетинає конус по твірних SD та SE. Точки 5 $(5_1, 5_2)$ та 6 $(6_1, 6_2)$ визначені як точки перетину твірної SF конуса з гранями призми, яка перетинається площиною (її слід m_1^2) по прямих e (e_1, e_2) та f (f_1, f_2). Щоб визначити ще ряд проміжних точок, треба провести кілька площин у межах пучка-посередника.

Розглянутий випадок перетину конуса та призми можна розповсюдити на випадок, коли два тіла є конусопірамідальними, а також на той випадок, де перетинаються тіла циліндропризматичні. В першому випадку посередниками будуть площини пучка прямої, що з'єднує вершини конусопірамід (рис.), в другому (рис.) – площини із пучка паралельних, що орієнтовані площиною паралелізму. Ця остання визначається двома перетинними прямими, проведеними через довільну точку, одна з яких паралельна твірним циліндра, а друга – ребрам призми. На кресленні (рис.) показані горизонтальні сліди m_1, m_1^1, m_1^2, m_1^3 пучка перетинних площин-посередників. Пучок перетинних площин-посередників задано і на наступному кресленні (рис.).

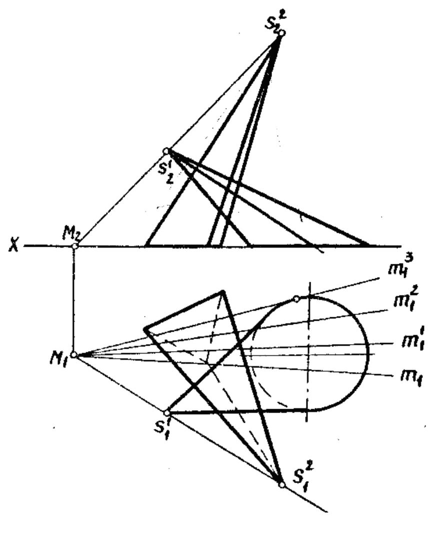


Рис. 6.5.

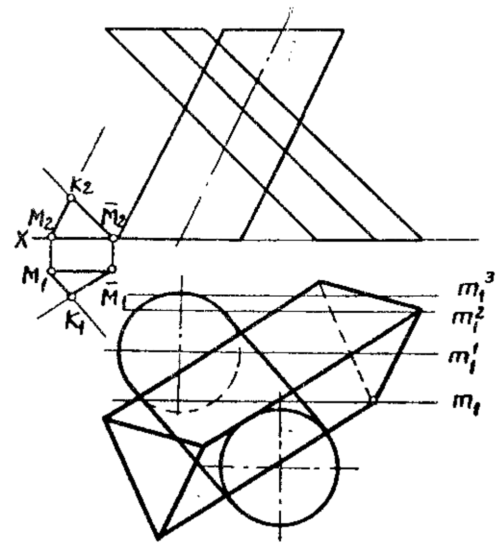


Рис. 6.6.

6.2. Якщо маємо дві поверхні обертання, осі яких перетинаються, то доцільно користуватися способом концентричних сфер-посередників.

Для зручності спосіб сфер передбачає таке розташування тіл на кресленні, щоб їх осі були паралельними площині проекцій. На кресленні (рис.) дана горизонтальна проекція циліндра та конуса, осі яких паралельні горизонтальній площині проекцій і перетинаються в точці O (0_1). Точки 4_1 та 5_1 перетину обрисових твірних будуть дальньою і ближньою точками лінії перетину. Щоб визначити ще одну опорну точку, з точки O_1, як із центра, проведено обрис сфери (коло) так, щоб він дотикався до твірних однієї поверхні і перетинав твірні другої. Перетинаючи конус і дотикаючись до циліндра, ця сфера R^1 стане межевим посередником. Будь-яка сфера меншого радіуса не перетнеться з циліндром і тому посередником бути не може. Сфера R^1 перетне (доткнеться) поверхню циліндра по колу, проекція якого – пряма K_1L_1. Лінії A_1B_1 та K_1L_1, перетинаючись між собою, дадуть точку 1_1 лінії перетину. Проміжні точки 2_1 та 3_1 знайдені за допомогою сфер R^2 та R^3, що перетинають циліндр по колах, які спроекціюються відповідно в прямі C_1D_1 та E_1F_1, а конус – по колах, проекції яких G_1H_1 та P_1Q_1. На кресленні видна лише половина горизонтальної проекції лінії перетину. Ця половина позначена точками 5_1, 1_1, 2_1, 3_1, 4_1. Фронтальна проекція лінії перетину будується, виходячи з умови лінії перетину обом заданим поверхням.

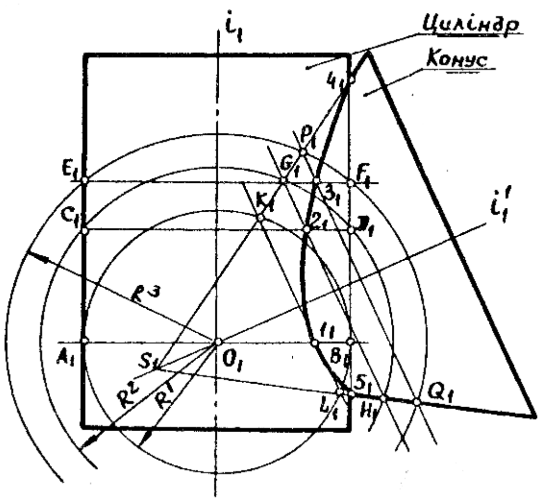


Рис. 6.7.

Контрольні запитання та вправи

1. Визначити суть застосування посередника.
2. Побудувати лінію перетину двох площин.
3. Навести на ортогональному кресленні приклад визначення точки перетину прямої та площини.
4. З'ясувати послідовність побудови лінії перетину тіла площиною.

5. Побудувати на кресленні лінії конічних перерізів.

6. Знайти точки перетину прямої з поверхнями довільного геометричного тіла.

7. Визначити посередники, які найчастіше зустрічаються при взаємному перетині поверхонь.

8. Побудувати лінію перетину поверхонь, застосовуючи спосіб пучка площин-посередників.

9. Побудувати лінію перетину поверхонь, застосовуючи спосіб концентричних сфер-посередників.

ЛЕКЦІЯ 7

Взаємна перпендикулярність прямих ліній та площин

7.1. Проекції прямого кута

7.2. перпендикулярність прямої та площини

7.3. Перпендикулярність двох площин

З усіх можливих взаємних положень прямих ліній і площин розглянемо ті випадки, коли пряма перпендикулярна до площини та коли площини взаємно перпендикулярні. Операції, пов'язані з перпендикулярністю, відносяться до основних графічних операцій.

7.1. Будь-який кут проекціюється на площину в рівновеликий кут (в натуру) тільки в тому випадку, коли сторони його паралельні площині проекцій. На відміну від інших, прямий кут проекціюється в рівновеликий не лише в зазначеному випадку, але і тоді, коли хоч одна його сторона паралельна площині проекцій. Сторона ВС прямого кута АВС (рис.) розташована довільно, а сторона АВ паралельна площині $П_1$. Щоб довести, що при цьому кут $A_1B_1C_1$ залишиться прямим, проведемо в площині $П_1$ пряму MD паралельно A_1B_1 (а також і АВ). Тепер MD – перпендикуляр до ВС і, згідно з теоремою про три перпендикуляри, кут DMB_1 – прямий. Але якщо Паралельна A_1B_1, то кут $A_1B_1C_1$ теж прямий.

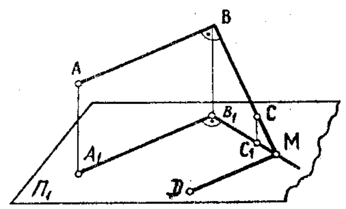


Рис. 7.1.

7.2. Пряма та площина взаємно перпендикулярні, якщо пряма перпендикулярна до двох перетин них прямих, розташованих в площині. А як спроекціюються на площину проекцій два прямих лінійних кути, утворені парою перетин них прямих і перпендикуляром до них? У випадку, коли сторони зазначених кутів є прямі загального положення, прямі кути спроекціюються на площини проекцій не в рівновеликі собі. Якщо ж за сторони прямого кута в площині взяти дві прямі так, щоб одна з них булу паралельна площині $П_1$, а друга – $П_2$ (рис.), то кути, утворені з кожною із взятих таким чином прямих і перпендикуляром до них, спроекціюються на відповідні площини проекцій у прямі кути. Інакше кажучи, якщо серед безлічі прямих в площині взяти її горизонталь і фронталь, тоді на кресленні p_1 перпендикуляра p з горизонтальною проекцією h_1 горизонталі і p_2 перпендикуляра p з фронтальною проекцією f_2 фронталі утворять прямі кути. Таким чином, площина та пряма взаємно перпендикулярні, якщо горизонтальна проекція прямої перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі площини, а фронтальна проекція прямої перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі площини.

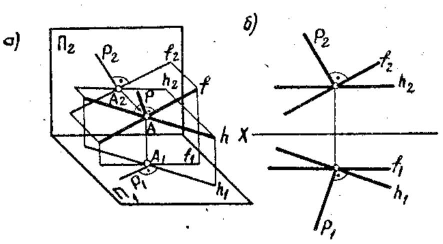


Рис. 7.2.

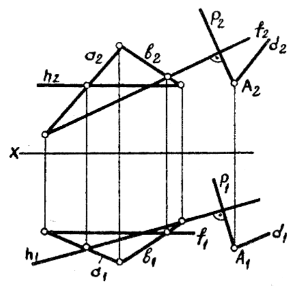


Рис. 7.3.

7.3. Дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до другої. Тому будь-яка задача на побудову взаємно перпендикулярних площин вирішується за допомогою прямої, перпендикулярної до площини. На кресленні (рис.) через задану точку А (A_1, A_2) проведена площина Г ($p \cap d$) перпендикулярно заданій площині Σ ($a \cap b$). Площина, що будується, на кресленні зафіксована двома перетин ними прямими в точці А, одна з яких d (d_1, d_2) проведена довільно, а друга p (p_1, p_2) є перпендикуляром до заданої площини Σ. Перед тим, як був проведений перпендикуляр до площини Σ, на ній побудовано горизонталь h (h_1, h_2) та фронталь f (f_1, f_2). Потім через A_1 проведена проекція p_1 перпендикулярно h_1, а через A_2 – проекція $p_2 \perp f_2$. На кресленні (рис.) вирішена та ж задача, але для випадку, коли площина задана слідами. Тут орієнтирами, що визначають положення проекцій p_1 і p_2 перпендикуляра до площини, є сліди цієї площини, бо $p_1 \perp m_1$, а $p_2 \perp n_2$.

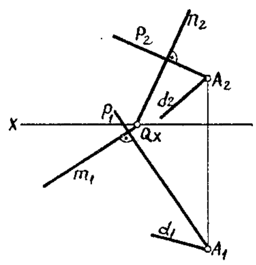


Рис. 7.4.

Контрольні запитання та вправи

1. Визначити, в яких випадках прямий кут проекціюється в рівновеликий йому кут.
2. Показати на комплексному кресленні ознаку перпендикулярності прямої та площини.
3. Побудувати на кресленні дві взаємно перпендикулярні площини.

ЛЕКЦІЯ 8

Перетворення комплексного креслення

8.1. Метричні задачі

8.2. Обертання навколо проекціюючої прямої

8.3. Обертання навколо прямої рівня

Відповідно з кресленнями, на яких геометричні елементи розташовані в загальному положенні, не можна вирішувати метричні задачі, тобто задачі, пов'язані з визначенням лінійних та кутових величин. Справа в тому, що об'єкти, які задані на комплексному кресленні в загальному положенні, бувають частіше всього спотворені. Тому про натуральні розміри відрізків, кутів плоских фігур та відстаней можна судити лише тоді, коли вони розташовані паралельно площині проекцій. Для приведення фігур в таке положення необхідно піддати задані креслення перетворенням.

Перетворення здійснюється переміщенням об’єкта при непорушній системі площин проекцій або переміщенням системи площин проекцій при непорушному об’єкті.

8.2. Основою цього способу перетворення є переміщення об’єкта навколо осі за допомогою обертання. Обертальний рух характеризується тим, що всі точки будь-якого об’єкта переміщуються в площинах, перпендикулярних до осі, по траєкторіях кіл. Побудова на кресленні зводиться до зображення траєкторій обертального руху, тобто тих кіл, за якими здійснюється переміщення об’єкта. Перпендикулярність осі обертання до площини проекцій обумовлена простотою зображення траєкторій. Ці зображення являють собою на кресленні кола на одній проекції і прямі, паралельні координатній осі, - на другій (рис. 8.1). Будь-який об’єкт повернеться навколо проекціюючої осі, якщо будуть повернуті геометричні елементи, що його визначають, на заданий кут в заданому напрямку.

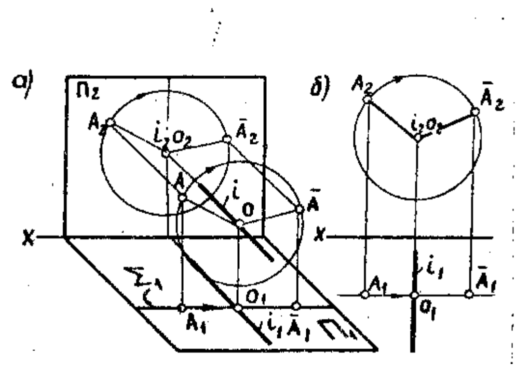


Рис. 8.1.

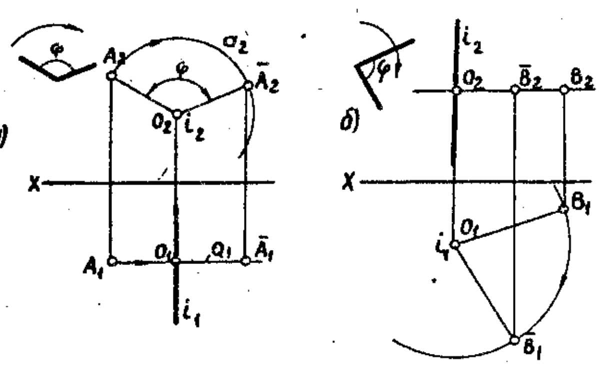


Рис. 8.2.

На кресленні (рис. 8.2) показано поворот точки А навколо фронтально проекціюючої осі (рис. 8.2 а) і точки В навколо горизонтально проекціюючої осі (рис. 8.2 б). Кругову траєкторію при обертанні описує проекція точки на тій площині, до якої перпендикулярна вісь обертання.

Щоб повернути пряму навколо заданої осі, досить повернути дві її точки на один і той же кут в одному напрямку. Припустимо, що задані точки А та В, які визначають пряму (рис. 8.3). Треба повернути пряму на кут φ в заданому напрямку. Очевидно, що $A_1B_1=\overline{A}_1\overline{B}_1$ бо $\Delta\ O_1A_1B_1=\Delta\ O_1\overline{A}_1\overline{B}_1$. Рівність трикутників є наслідком того, що $O_1A_1=O_1\overline{A}_1$, а $O_1B_1=O_1\overline{B}_1$ як радіуси одного кола, а кут між цими радіусами до повороту і після нього залишається незмінним. Таким чином, відрізок прямої, обертаючись навколо осі, величину своєї проекції на площину, перпендикулярну осі, не змінює. Ця обставина дозволяє здійснювати будь-який поворот прямої за допомогою однієї точки, якщо радіус обертання цієї точки жорстко скріпити з прямою.

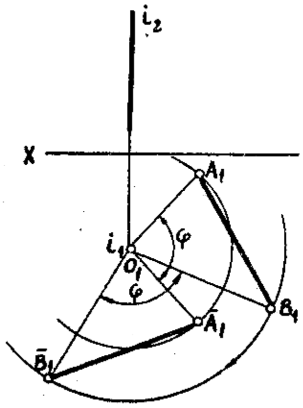


Рис. 8.3.

На кресленні (рис. 8.4) з точки i_1 проведено перпендикуляр до A_1B_1, зафіксована точка K_1 перетину його з прямою A_1B_1. Потім радіусом i_1K_1 описана дуга кола, зафіксовано місце $\overline{K}_1$ точки після повороту на кут φ проти стрілки годинника. До дуги кола в точці K_1 проведена дотична і на ній відкладено відрізок, у якого $A_1K_1=\overline{A}_1\overline{K}_1$ та $B_1K_1=\overline{B}_1\overline{K}_1$.

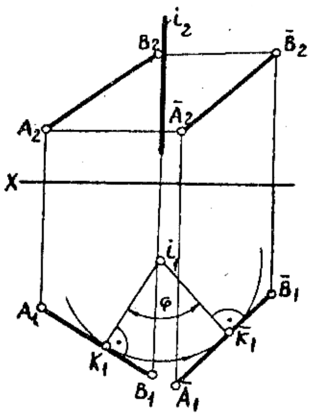


Рис. 8.4.

Приклад 1.

Обертальним перетворенням навколо осі привести точку А (A_1, A_2) в положення, при якому її відстань від площини $П_2$ стала б вдвічі більшою (рис. 8.5).

Спочатку намітимо геометричне місце, на якому розташована точка після повороту. Це місце є площиною Σ ($Σ_1$), відстань якої від $П_2$ дорівнює подвійній $2y_a$ попередній відстані. Потім радіусом i_1A_1 з i_1 як із центра проведемо дугу кола так, щоб вона перетнула пряму $Σ_1$. Точка перетину дуги з прямою $Σ_1$ стане проекцією A_1 точки після потрібного повороту. Проекція $\overline{A}_2$ після повороту визначиться за допомогою лінії проекційного зв'язку з прямою, проведеною через A_2 паралельно осі X.

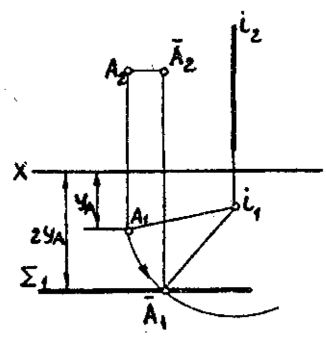


Рис. 8.5.

Приклад 2.

Пряму АВ повернути до положення, паралельного горизонтальній площині проекцій (рис. 8.6).

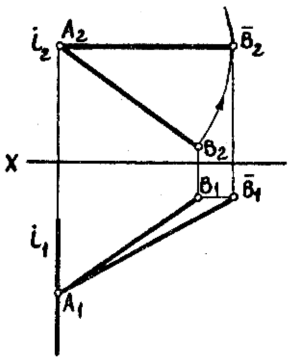


Рис. 8.6.

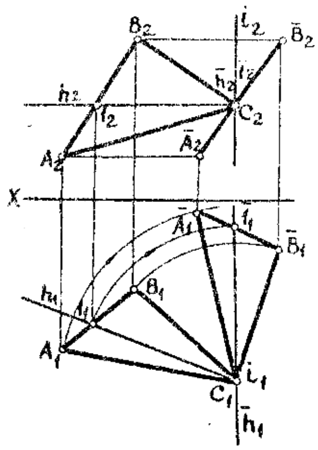


Рис. 8.7.

Для перетворення необхідно, перш за все, щоб вісь обертання була фронтально проекціюючою, бо тільки після обертання навколо такої осі пряма змінить своє положення найбільш раціонально. Крім того, вісь зручно провести через одну з точок даної прямої, наприклад, через точку А (A_1, A_2). Точка В, обертаючись навколо осі i (i_1, i_2), переміститься так, що її проекція B_2 опише коло, а проекція B_1 – пряму, паралельну осі X. Пряма розташована паралельно площині $П_1$ в момент, коли фронтальна проекція точки В знаходиться на одному рівні з проекцією A_2 над віссю X, тобто коли фронтальна проекція прямої стане паралельною осі X. Горизонтальна проекція B_1 переміститься в положення $\overline{B}_1$ по прямій, паралельній осі X.

Приклад 3.

Способом обертання перетворити площину АВС в положення фронтально проекціююче (рис. 8.7).

Дана площина стане фронтально проекціюючою, коли одна з її прямих розташована перпендикулярно до $П_2$. Для розв’язання задачі в площині взята горизонталь h (h_1, h_2). Потім визначена горизонтально проекціююча вісь обертання, що проходить через точку С (C_1, C_2). Вибір точки С обумовлений зручністю, а горизонтально проекціююча орієнтація осі обертання є невід’ємною умовою, бо обертанням навколо фронтально проекціюючої осі неможливо перевести горизонталь у положення, перпендикулярне до $П_2$. Подальше розв’язання задачі зводиться до повороту горизонталі h разом з площиною в положення, перпендикулярне $П_2$, тобто в таке, коли проекція h_1 горизонталі стане перпендикулярною до осі X.

8.3. Умова цього перетворення полягає в тому, що точки об'єкта, який обертається, переміщуються не в площинах рівня, а в проекціюючих площинах. В зв'язку з цим проекції кругових траєкторій точок на одну з двох площин проекцій стануть не колами, а еліпсами. Точка A (A_1, A_2), обертаючись навколо горизонтальної осі *i* (i_1, i_2) (рис. 8.8 а), переміщується в горизонтально проекціюючій площині Σ (Σ_1) по колу. Це коло проекціюється на $П_1$ у вигляді прямої, що збігається зі слідом-проекцією Σ_1, а на $П_2$ – у вигляді еліпса. Якщо точку A (A_1, A_2) переміщувати навколо горизонтальної осі обертання, то ця точка може бути суміщена з горизонтальною площиною, що проходить через вісь обертання. Після такого повороту точки A її проекція $\overline{A}_2$ розташована на проекції i_2 осі, а проекція $\overline{A}_1$ - на прямій Σ_1 на відстані від центра обертання O_1, рівній величині радіуса обертання OA. Щоб визначити цю величину, можна скористатися властивістю прямокутного трикутника, яка полягає в тому, що величина будь-якого відрізка є гіпотенузою трикутника, один катет якого – проекція цього відрізка на площину проекцій, а другий – різниця відстаней кінців відрізка від площини проекцій (рис. 8.8 б). На кресленні (рис. 8.8 а) побудовано прямокутний трикутник O_1A_1D, гіпотенуза якого O_1D є величина r радіуса обертання. Потім цю величину відкладено від O_1 на прямій Σ_1, де кінець її зафіксує положення проекції $\overline{A}_1$ після повороту. При обертанні об'єкта навколо фронтальної прямої послідовність побудов аналогічна з урахуванням лише того, що всі точки об'єкта тепер переміщуються у фронтально проекціюючих площинах, перпендикулярних до фронтальної прямої.

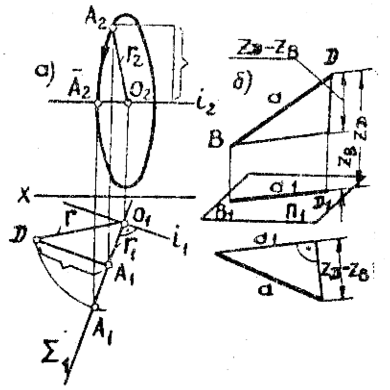


Рис. 8.8.

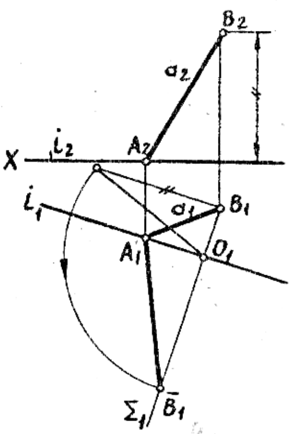


Рис. 8.9.

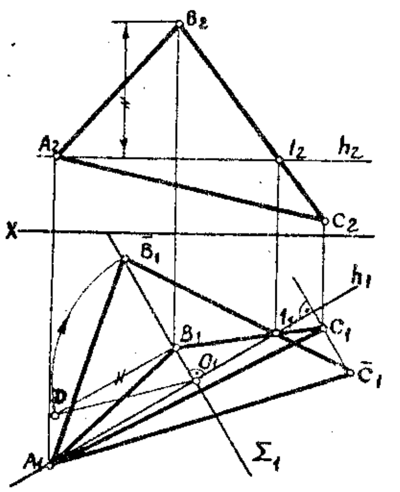


Рис. 8.10.

Обертання навколо прямої нульового рівня називають ще способом суміщення, бо внаслідок цього перетворення геометричні елементи суміщуються з площиною нульового рівня $П_1$ або $П_2$. На кресленні (рис. 8.9) показане суміщення прямої з площиною $П_1$ за допомогою обертання навколо осі *i* (i_1, i_2). Тут вісь обертання являє собою горизонтальний слід площини Г (a∩i). Такий спосіб обертання зручний при визначенні величин плоских фігур. Щоб визначити величину трикутника АВС (рис. 8.10), повернемо його навколо власної горизонталі *h* (h_1, h_2) до положення, паралельного площині $П_1$. При повороті трикутника навколо прямої *h* точки А та 1 залишаться непорушними як такі, що розташовані на осі обертання. Для визначення нового положення $\overline{B}_1$ проекції B_1 прямокутного трикутника O_1B_1D. Потім величину радіуса обертання O_1D відкладаємо на прямій Σ_1 від точки O_1 і визначаємо місце горизонтальної проекції $\overline{B}_1$ точки В після повороту. Проекцію $\overline{C}_1$ точки С після повороту знаходимо на перетині двох прямих $\overline{B}_1 1_1$ та прямої, проведеної через C_1 перпендикулярно h_1. З'єднавши $A_1\overline{B}_1\overline{C}_1$, маємо трикутник, рівний за величиною трикутнику АВС.

ЛЕКЦІЯ 9

Перетворення комплексного креслення

9.1. Плоско-паралельне переміщення

9.2. Заміна площин проекцій

9.3. Визначення відстаней

9.4. Визначення кутів

Контрольні запитання та вправи

9.1. Будь-який об'єкт можна привести в бажане розташування відносно площин проекцій, використовуючи не обертальне, а довільне плоско-паралельне переміщення, тобто таке, при якому всі точки переміщуються в площинах, паралельних між собою, а відстані між точками залишаються незмінними. Розглянемо таке переміщення в площинах, паралельних якій-небудь площині проекцій, тобто в площинах рівня. Якщо, наприклад, кінці А і В відрізка (рис. 9.1) перемістити в площинах Σ та Ω, то проекція відрізка на площину Π_1 своєї величини не змінить, тобто $A_1B_1=\overline{A}_1\overline{B}_1$. Фронтальні проекції всіх точок відрізка мають при цьому переміщенні прямолінійні траєкторії, паралельні осі X. При необхідності можна послідовно здійснити цілий ряд плоско-паралельних переміщень.

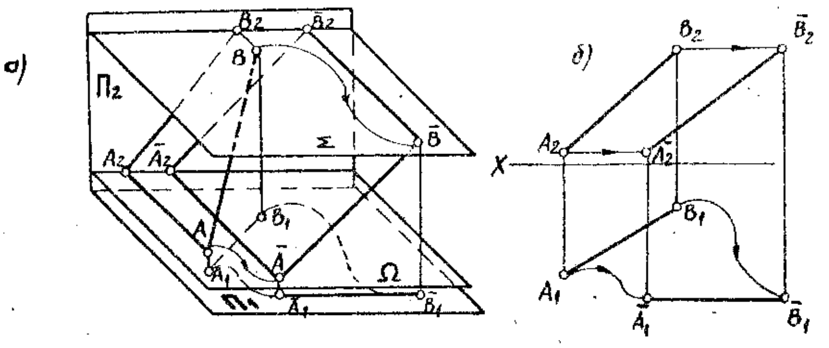


Рис. 9.1.

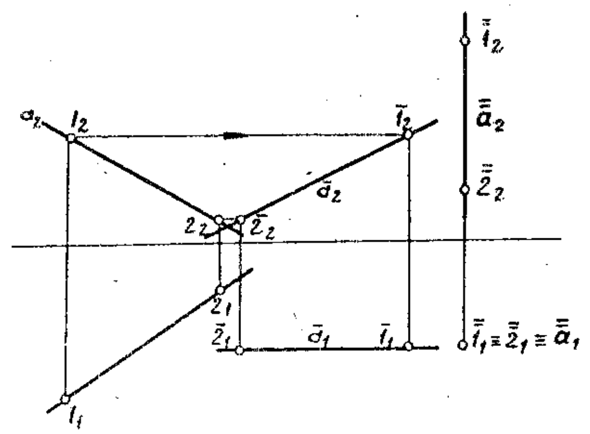


Рис. 9.2.

Припустимо, що задана пряма *а* (a_1, a_2). Треба плоско-паралельним переміщенням привести її в горизонтально проекціююче положення (рис. 9.2). Позначимо спочатку на прямій дві точки 1 $(1_1, 1_2)$ та 2 $(2_1, 2_2)$ і перемістимо їх разом з прямою так, щоб проекції 1_1 та 2_1 після переміщення розташувались паралельно осі X, при цьому $1_1 2_1 = \overline{1}_1 \overline{2}_1$. Фронтальні проекції перемістяться по прямих $1_2 \overline{1}_2$ та $2_2 \overline{2}_2$ і після встановлення проекційного зв'язку між проекціями пряма *а* стане в просторі паралельною площині Π_2. Після цього перемістимо пряму у фронтальній площині до положення, коли фронтальна проекція $\overline{\overline{1_2 2_2}}$ стане перпендикулярною до осі X. Проекції $\overline{1}_1$ та $\overline{2}_1$ перемістяться по прямій, паралельній осі X, і, зберігаючи проекційний зв'язок з $\overline{\overline{1_2 2_2}}$, зіллються в одну точку $\overline{\overline{1}}_2 \equiv \overline{\overline{2}}_2$, вказуючи на те, що пряма внаслідок подвійного переміщення стала горизонтально проекціюючою.

9.2. Перетворення за допомогою заміни площин проекцій полягає в тому, що потрібне розташування об'єкта відносно площин проекцій досягається заміною однієї системи площин проекцій на іншу при непорушному об'єкті. При кожній такій заміні нова система двох площин проекцій має в своєму складі одну площину проекцій з попередньої системи.

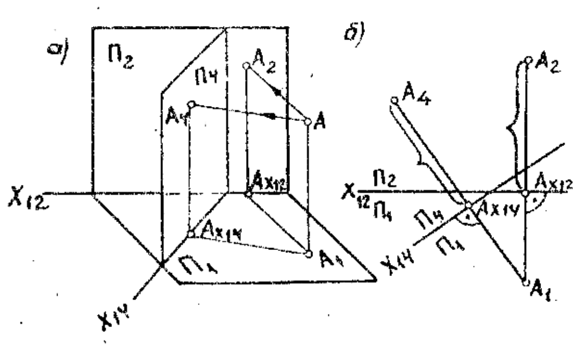


Рис. 9.3.

Систему площин проекцій $X_{12}\dfrac{\Pi_2}{\Pi_1}$ можна замінити новою X_{14}, в якій площина Π_1 залишиться, а площина Π_2 буде замінена будь-якою горизонтально проекціюючою площиною (рис. 9.3 а). Точка А в системі X_{12} має проекції A_1 та A_2, а в системі X_{14} – проекції A_1 та A_4. Сумістивши площини Π_1 та Π_4 в одну площину, одержимо креслення системи X_{14} (рис. 9.3 б). Внаслідок того, що проекції A_2 та A_4 здобуті за допомогою проекціюючих променів AA_2 та AA_4, паралельних площині Π_1, відстані цих проекцій до осей X_{12} та X_{14} (до площини Π_1) однакові, тобто $A_2A_{x12}=A_4A_{x14}$ **(1).** Вихідну систему X_{12} можна замінити на X_{24} (рис. 9.4 а) так, що Π_2 залишиться для нової системи, а площину Π_1 замінить будь-яка фронтально проекціююча площина. В цьому випадку (рис. 9.4 б) креслення нової системи X_{24} будується, виходячи з того, що $A_1A_{x12}=A_4A_{x24}$ **(2)**. Можна здійснити послідовно кілька замін. При цьому креслення кожної наступної системи будемо мати із попередньої системи на основі рівностей (1) чи (2). Перетворюючи креслення за способом заміни, належить пам'ятати:

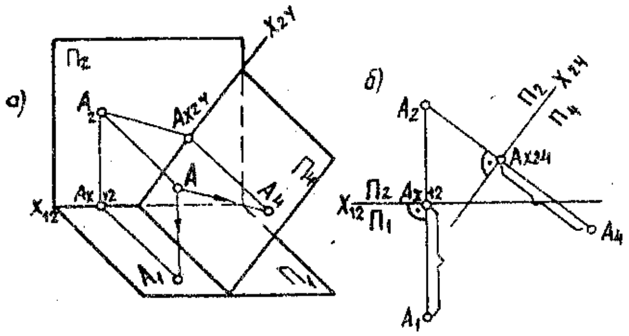


Рис. 9.4.

1. Вісь проекцій кожної нової системи можна наносити в будь-якому місці поля креслення, напрямок її обумовлюється розв'язанням задачі.

2. Для кожної системи дві проекції об'єкта розташовані на спільному перпендикулярі до осі проекцій цієї системи.

3. Відстань від осі нової системи до проекції точки на площину, що замінює, дорівнює відстані від осі проекцій вихідної системи до проекції тієї ж точки на площину, що змінюється.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.

Дана пряма АВ. Необхідно перетворити креслення так, щоб в новій системі X_{14} пряма була паралельна до площини проекцій $П_4$ (рис. 9.5).

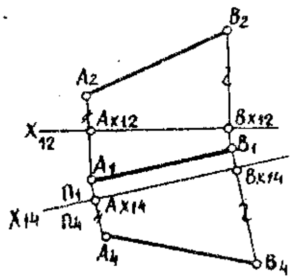


Рис. 9.5.

Щоб пряма стала паралельною $П_4$, в новій системі проводимо вісь проекцій X_{14} паралельно горизонтальній проекції A_1B_1 прямої. Потім через A_1 та B_1 проводимо лінії проекційного зв'язку нової системи (перпендикуляри до X_{14}) і на них від X_{14} відкладаємо відстані $A_{x14}A_4=A_2A_{x12}$ та $B_{x14}B_4=B_2B_{x12}$. Ці відстані можна відкладати, залежно від наявності вільного місця, в один або в другий бік.

Приклад 2.

Здійснити заміну площин так, щоб пряма АВ (рис. 9.6 а) стала в новій системі перпендикулярною горизонтальній площині проекцій.

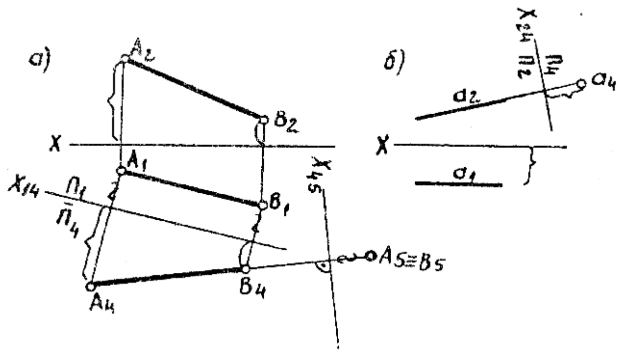


Рис. 9.6.

Щоб задана пряма загального положення спроекціювалася в точку на площину, що замінює, ця площина повинна бути нахиленою до площин $П_1$ та $П_2$, а не перпендикулярною до однієї з них, чого вимагає спосіб заміни площин проекцій. Таким чином, за допомогою однієї заміни можна мати проекцію прямої у вигляді точки лише тоді, коли ця пряма паралельна якійсь площині проекцій у вихідній системі (рис. 9.6 б). Щоб вирішити поставлену задачу з прямою загального положення, необхідна послідовна заміна двох площин проекцій: спочатку $П_2$ на $П_4$, а потім $П_4$ на $П_5$ (рис. 9.6 а).

Приклад 3.

Площину АВС загального положення (рис. 9.7) перетворити в проекціюючу відносно якоїсь площини проекцій. Задана площина стане в новій системі проекціюючою лише тоді, коли замінююча площина проекцій (нова) розташується перпендикулярно якійсь прямій заданої площини. Для того, щоб достатньою була лише одна заміна, замінююча площина $П_4$, будучи перпендикулярною до $П_2$, повинна розташуватись перпендикулярно і до фронталей даної площини. На кресленні (рис. 9.7) через точку А проведена фронталь *f* (f_1, f_2) заданої площини та зображена площина $П_4$. Після цього побудована f_4 фронталі f та B_4 точки В на площині $П_4$. Пряма, що з'єднує точки $A_4 \equiv f_4$ та B_4, є слідом-проекцією площини АВС в системі X_{24} площин проекцій $\dfrac{П_2}{П_4}$.

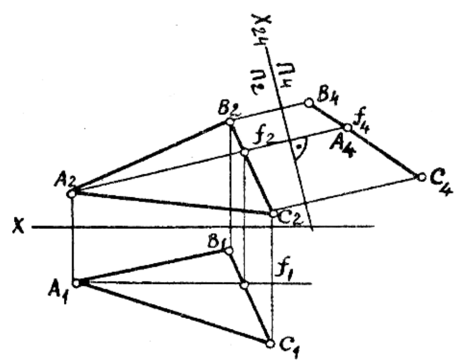


Рис. 9.7.

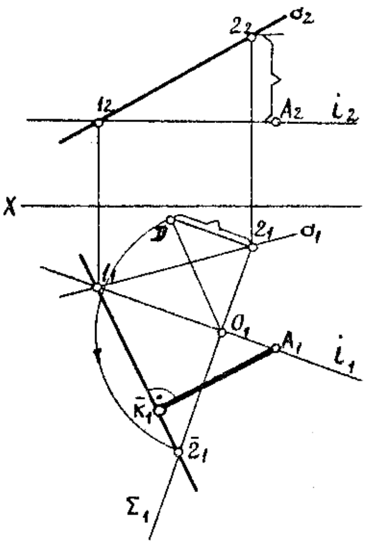


Рис. 9.8.

9.3. Для визначення відстані між точкою А (A_1, A_2) та прямою *a* (a_1, a_2) (рис. 9.8) скористуємось обертанням навколо прямої рівня. При цьому через точку А проведемо горизонтальну пряму *i* (i_1, i_2), що перетинає дану пряму в точці 1 (1_1, 1_2). Далі повернемо задану пряму навколо прямої *i* до горизонтального положення. Для здійснення цього повороту позначена довільна точка 2 (2_1, 2_2) і через проекцію 2_1 проведено слід горизонтально проекціюючої площини Σ_1, в якій переміщується точка 2. Потім на цьому сліді з центром обертання О (O_1) відкладено радіус обертання точки 2, за величиною рівний відрізку O_1D, і знайдена точка $\overline{2}_1$. Величина відстані $A_1\overline{K}_1$ до прямої $1_1\overline{2}_1$ - відстань, що шукаємо, бо площина 12А паралельна площині Π_1. Ця задача може бути вирішена подвійним плоско-паралельним переміщенням або подвійною заміною, або подвійним обертанням навколо проекціюючої осі. В усіх трьох випадках задана пряма перетворюється в положення, перпендикулярне площині проекцій.

При визначенні відстані між точкою А (A_1, A_2) і площиною Г ($m \cap n$) (рис. 9.9) повернемо точку разом з площиною навколо горизонтально проекціюючої осі *i* (i_1, i_2) до фронтально проекціюючого положення. Вісь обертання для зручності розташована в площині Π_2, внаслідок чого точка В (B_1, B_2) фронтального сліду n_2 при обертанні залишається непорушною. Обертання здійснюється так. Із i_1 як із центра проведена дуга кола радіусом i_1F_1 до перетину з віссю Х в точці R_x (вона ж $\overline{F}_1$).

Знаючи, що точка $\overline{R}_x$ є точкою сходу слідів після повороту, з'єднуємо її з проекцією B_2 нерухомої точки В і знаходимо фронтальний слід $\overline{n}_2$ після повороту. Положення горизонтального сліду $\overline{m}_1$ після повороту теж показане ($\overline{m}_1 \perp X$) на кресленні, хоча для вирішення задачі в цьому немає потреби. Фронтально проекціююче положення площини після повороту обумовило величину кута φ повороту площини та точки А. відрізок $\overline{A}_2\overline{K}_2$, перпендикулярний до сліду $\overline{n}_2$ площини, - відстань від точки до площини.

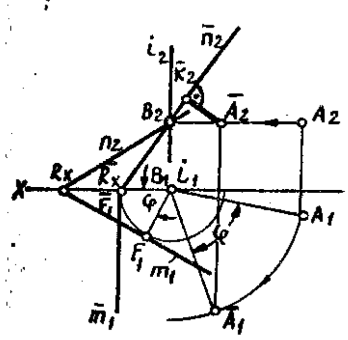


Рис. 9.9.

9.4. Кут між прямою і площиною вимірюється кутом між прямою і її проекцією на дану площину. Одну сторону цього кута у вигляді заданої прямої маємо при постановці задачі. Другу його сторону можемо мати лише після ряду допоміжних побудов. Щоб уникнути цих побудов і, таким чином, спростити рішення, зручніше замість кута φ між прямою і площиною визначити кут θ між прямою і перпендикуляром до площини (рис. 9.10 а). Потім, виходячи з того, що φ+θ=90°, елементарною побудовою визначаємо потрібний кут (рис. 9.10 б).

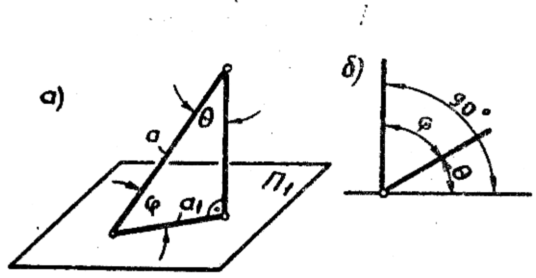


Рис. 9.10.

Припустимо, що задана площина Σ $(f \cap h)$ та пряма *а* (a_1, a_2). Щоб визначити кут між ними, на цій прямій (рис. 9.11 а) взята довільна точка А (A_1, A_2) і через неї проведено перпендикуляр р (p_1, p_2) до площини Σ $(p_1 \perp h_1, p_2 \perp f_2)$. Потім на окремому місці креслення (рис. 9.11 б) визначена величина кута θ обертанням навколо фронтальної прямої *n* (n_1, n_2) до фронтального положення $1_2 \bar{A}_2 2_2$. Це обертання являє собою суміщення площини кута θ з площиною Π_2. Після графічного віднімання кута θ від прямого кута маємо величину кута φ, який шукаємо.

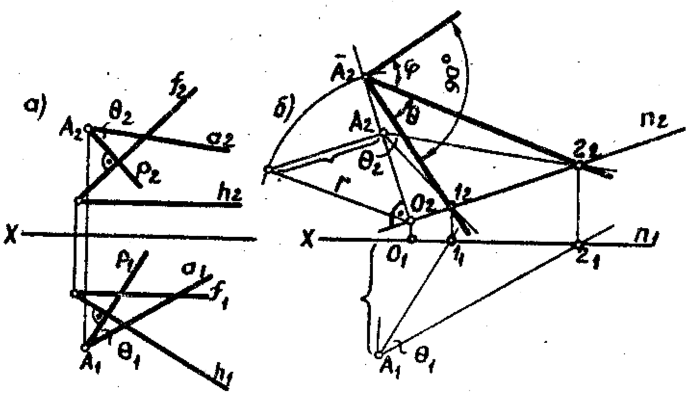


Рис. 9.11.

Кут між двома площинами визначається лінійним кутом, який утворює переріз двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра (рис. 9.12). Одержання на кресленні лінійного кута за допомогою позначеного перерізу потребує трудомістких допоміжних побудов, уникнути яких можна, якщо побудувати перпендикуляри до заданих площин через довільно вибрану точку простору. Як видно з просторового зображення, кут θ між перпендикулярами DE та DF до площин Г та Δ є доповнюючим до 180° кут φ між площинами. Визначення кута між площинами за допомогою того кута, що доповнює до 180°, особливо раціонально у випадках, коли площини задані слідами або лініями рівня.

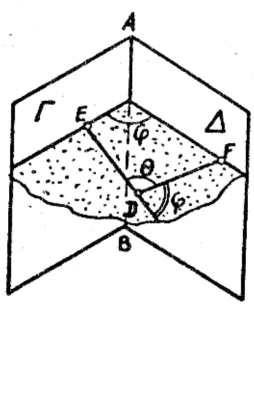


Рис. 9.12.

Припустимо, що задані площини Г ($m \cap n$) та Δ ($k \cap l$). Потрібно визначити кут між ними (рис. 9.13). На кресленні вибрана довільна точка D (D_1, D_2) і через неї проведені два перпендикуляри: p до площини Г ($p_1 \perp m_1, p_2 \perp n_2$) і p' до площини Δ ($p'_1 \perp l_1, p'_2 \perp k_2$). Однойменні проекції перпендикулярів утворюють на кресленні проекції θ_1 і θ_2 кута θ. На цьому ж кресленні показані проекції φ_1 і φ_2 кута φ. Для визначення істинних величин кутів θ і φ можна застосувати перетворення, яке використано в попередньому прикладі.

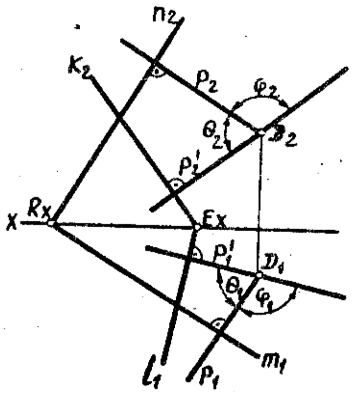


Рис. 9.13.

Коли площини задані плоскими фігурами, що мають на кресленні спільну пряму (ребро двогранного кута), кут між такими площинами зручно визначати способом заміни площин проекцій (рис. 9.14). Плоскі фігури подвійною заміною переводяться в проекціююче положення, для чого спочатку замінюється площина Π_2 на Π_4 ($X_{14} \| A_1B_1$), а потім – Π_4 на Π_5 ($X_{45} \perp A_4B_4$). Після другої заміни ребро спроекціювалося в точку $A_5 \equiv B_5$ – вершину кута φ, а площини (плоскі фігури) спроекціювалися у відрізки – сторони кута φ.

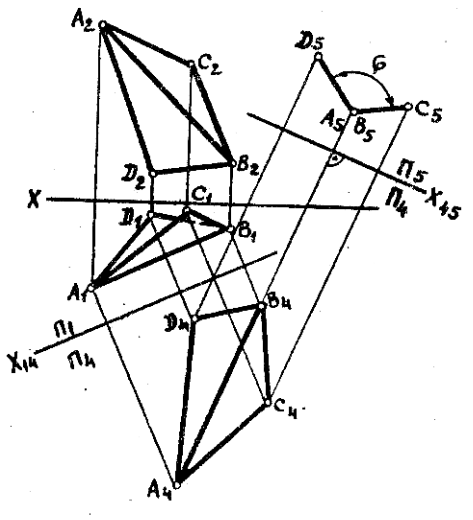


Рис. 9.14.

Контрольні запитання та вправи

1. Визначити перетворення, які здійснюються переміщенням об'єкта при непорушній системі площин проекцій.

2. Визначити перетворення, які здійснюються переміщенням системи площин проекцій при непорушному об'єкті.

3. Розв'язати на кресленнях задачі, пов'язані з визначенням лінійних величин.

4. Розв'язати на кресленнях задачі, пов'язані з визначенням кутових величин.

ЗМІСТ

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Антонович Є.А. та ін. Нарисна геометрія. Практикум: Навч. Посібник / За ред. проф. Є.А. Антоновича. –Львів: Світ, 2004. -528 с.

2. Бубенников А.В. Начертательная геометрия / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – М.: Высш. шк., 1973. – 416 с.

3. Гордон В.О., М.А. Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии: Учеб. Пособие для втузов/ Под ред. В.О. Гордона и Ю.Б. Иванова.- 24-изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000.- 272 с.

4. Иванов Г.С. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1995. – 224 с.

5. Даниленко В.Я. Основи нарисної геометрії: Навчальний посібник, -Харків, ХНУГХ, 1995 -109 с.

6. Котов И.И. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1970. – 384 с.

7.Лагерь А.И. Инженерная графика /А.И. Лагерь, Э.А. Колесникова. – М.: Высш. шк., 1985. – 176 с.

8.Михайленко В.Е. Инженерная графика /В.Е. Михайленко, А.М. Пономарев. – Київ: Вища шк., 1985. – 295 с.

9. Начертательная геометрия: Учебник для вузов / Н.Н. Крылов, П.И. Лобандиевский, С.А. Мэн, В.Л. Николаев, Г.С. Иконникова. – М.: Высш. шк., 1977. – 231с.

10. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1974. – 191 с.

11. Четверухин Н.Ф. Начертательная геометрия / Н.Ф. Четверухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишникова и др. – М.: Высш. шк., 1963. – 420 с.

12. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Лекції з інженерної графіки (для студентів 1 курсу напряму підготовки 6.050702 – «Елекромеханіка»)

Автор: Тетяна Леонтіївна Руденко

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 32 Л

Підп. до друку10.11.08	Формат 210х297 1/8	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.-друк. арк. 3,6	Обл.-вид.арк. 3,9
Замовл. №	Тираж 50 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ

61002, Харків, вул. Революції, 12